02

INTERACTIONS DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques participent au mouvement général des sciences : accroissement de la production (de 1958 à 1988, le nombre des articles recensés et analysés annuellement par les *Mathematical Reviews* est passé de 8 000 à 100 000, une multiplication par 2,5 tous les dix ans), accélération de la circulation et de la compétition internationale, impact de certains développements technologiques (comme la puissance des ordinateurs) sur le type de problèmes abordés.

Dans les dernières années, la nature et le niveau de sophistication des mathématiques utilisées dans les autres sciences a aussi considérablement crû. Aux outils traditionnels d'algèbre linéaire et de calcul différentiel et intégral sont venus s'adjoindre de nombreux autres concepts et techniques mathématiques- Maïs les échanges ne se font pas en sens unique. De tous temps, les mathématiques se sont nourries des idées venues d'ailleurs, et ce mouvement a de nouveau pris une place importante dans leur développement.

Ce texte n'entend pas faire un tableau exhaustif ni même partiel de l'état des mathématiques, de leurs applications et de leurs interactions en France, Son objectif est seulement de mettre en évidence, à travers quelques exemples, la place, les mécanismes et l'importance de ces interactions et de proposer quelques mesures de nature à soutenir le processus en cours.

LES ENJEUX

En ce qui concerne les interactions des mathématiques avec les autres sciences, les années 80 sont marquées par l'utilisation de plus en plus répandue de modèles destinés à rendre compte de l'évolution de systèmes de plus en plus complexes, que ce soit dans la recherche fondamentale ou l'industrie, dans les sciences exactes» naturelles ou humaines. L'étude de ces modèles, qui s'expriment le plus souvent dans le langage mathématique, comporte en général plusieurs phases : étude de leur cohérence, existence de solutions, comportement des solutions, résolution ou simulation sur ordinateur. Toutes ou presque font appel à des concepts et à des outils mathématiques élaborés, souvent très spécialisés, dont certains sont d'introduction récente.

Dégageons d'emblée quelques enjeux en essayant d'analyser succinctement leurs spécificités. Nous reviendrons plus tard, dans une perspective plus historique, sur les mécanismes des interactions entre les mathématiques et l'ensemble des activités scientifiques.

- Les enjeux industriels

Longtemps les mathématiques sont apparues dans l'industrie comme une discipline de service dont la présence se réduisait à la mise en œuvre d'un outil de calcul. Sous la pression de la compétition économique et des défis technologiques, les progrès de la modélisation et des méthodes numériques, et surtout l'augmentation considérable de la puissance des ordinateurs, ont changé la nature et la portée des mathématiques utilisées dans l'industrie. Cette modification a d'abord touché les grandes entreprises et celles des secteurs de pointe, souvent dans le cadre de grands programmes technologiques; elle s'étend de plus en plus vers des entreprises petites et moyennes. La modification des outils correspond à un changement de complexité des problèmes abordés; alors qu'au XIX^{e} siècle les modèles étaient unidimensionnels ou linéaires, les problèmes abordés maintenant sont multidimensionnels et non-linéaires. En même temps que l'accent se déplaçait du faisable vers l'optimal, l'intérêt s'est déplacé des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles, des interpolations et extrapolations aux problèmes inverses. Cette sophistication est indispensable dans les contrôles de qualité, qui sont bien souvent la clef de la compétitivité d'une entreprise d'aujourd'hui.

L'introduction de paramètres incertains dans les modèles, qui se généralise (comme, par exemple, dans les modèles de couverture de risques à terme en mathématiques financières), a été rendue possible par des outils et des techniques stochastiques dont la mise au point est récente- On peut dire que, de plus en plus, les besoins industriels influencent et motivent une partie de la recherche mathématique.

Ces besoins industriels correspondent soit à une recherche d'efficacité économique ou technique (aviation, automobile, gestion de réseaux ou de production, mécanique des structures, génie civil ou chimique, géophysique, imagerie médicale, électromagnétisme), soit à de nouveaux domaines scientifiques (électronique, informatique, prévision du temps ou évolution du climat) ou technologiques (espace, fusion thermonucléaire, combustion)- Dans de nombreux cas, l'expérimentation numérique est là pour économiser une expérimentation physique trop onéreuse (efforts de pression sur les aubes d'une turbine, problèmes électromagnétiques liés à la rentrée dans l'atmosphère d'une navette, dessin de carrosserie de voitures»,) ou même à la limite du possible (impact de l'homme sur le climat par exemple).

Cette évolution provoque dans l'industrie une forte demande de mathématiciens ou de scientifiques ayant un très bon bagage en mathématiques; ceci se traduit par l'ouverture de laboratoires industriels à des étudiants en thèse, par un important flux d'embauchés de diplômés, par la signature de contrats avec des laboratoires ou des scientifiques, enfin par la création (encore timide en France, mais plus importante aux Etats-Unis) de cabinets de conseil en mathématiques.

Comment notre système de formation et de recherche peut-il répondre à ce nouveau besoin ? C'est le premier enjeu que nous voulons souligner.

2 - Les enjeux scientifiques

Dégageons quelques données générales, et quelques problèmes cruciaux.

Dans la recherche scientifique fondamentale on peut distinguer schématiquement trois modes de travail qui impliquent l'usage de mathématiques :

• *les modèles théoriques, qualitatifs ou quantitatifs, font souvent appel à des mathématiques encore en cours de création,* soit en empruntant (ou en suscitant) des concepts pour définir leur cadre de développement, soit en utilisant (ou en réclamant) des théorèmes pour leur étude analytique et des algorithmes pour leur étude numérique;

• *le chercheur utilise des outils mathématiques,* par exemple pour le traitement de données expérimentales (spécialement lorsqu'elles sont nombreuses comme en Astronomie ou en Physique Nucléaire), ou l'estimation de paramètres (les branches des mathématiques impliquées allant du calcul différentiel et intégral aux transformations de Fourier ou de Laplace, en passant par les critères statistiques, l'algèbre, la géométrie...);

• *la simulation numérique* enfin, qui s'impose comme une approche fructueuse (souvent parallèle et complémentaire à l'expérimentation de laboratoire ou *in situ)* demande souvent des outils et techniques mathématiques d'un autre ordre (analyse numérique, méthodes stochastiques, algorithmique numérique..,).

Comme nous l'avons dit plus haut, la plupart des secteurs scientifiques sont concernés par cette intervention grandissante des mathématiques. Au risque d'apparaître un peu schématique, on peut cependant séparer les domaines qui étaient déjà traditionnellement des créateurs ou des utilisateurs de mathématiques (mécanique céleste et mécanique des milieux continus, physique théorique et mécanique quantique) des nouveaux espaces qui sont venus à la modélisation mathématique intensive seulement depuis peu (écologie, biologie, chimie, biochimie, économie, géophysique, physique du solide, combustion, informatique, sciences cognitives).

3 - Les enjeux culturels

Dans la culture scientifique nécessaire à une vaste population de notre époque, les mathématiques apportent deux éléments importants : des concepts et une démarche.

• *Les concepts mathématiques sont abstraits, comme le sont aussi ceux des autres sciences. Leur caractère spécifique n'est pas l'abstraction, mais la généralité.* Qu'ils proviennent de la physique, d'une technique, de l'expérience commune, leur champ d'application est beaucoup plus vaste que leur champ d'origine. La valeur des concepts mathématiques est donc interdisciplinaire par essence. Leur efficacité est fonction de leur assimilation par le plus grand nombre possible d'individus, et nombre d'entre eux sont tombés au fil des siècles dans le domaine culture] commun ou sont en train de le faire (par exemple, l'accélération, l'équivalence travail-chaleur, les probabilités...). Mais il y a aujourd'hui une contradiction bien réelle entre la croissance du nombre des concepts pertinents et importants et la capacité du système éducatif à les diffuser. Cet enjeu implique, sans doute, une révision profonde des buts et des méthodes de l'enseignement des mathématiques. La variété des enseignements donnés dans les universités à des étudiants d'autres disciplines (c'est souvent plus marqué encore à l'étranger qu'en France) donne une piste pour une telle révision.

• *La démarche mathématique est faite d'essais, d'échecs, et de corrections, comme dans toutes les autres sciences. Son caractère très original est la preuve ou démonstration hypothético-déductive.* On a critiqué, ajuste titre, la réduction des mathématiques à un enchaînement de propositions reliées par des démonstrations parce que la recherche et la découverte en sont absentes et que la portée réelle des concepts et des théories n'y apparaît pas. Mais il serait grave, en tentant d'étendre le champ et les approches, d'oublier le rôle crucial de la démonstration dans la démarche mathématique. La rigueur mathématique qui tient à la formalisation des énoncés et des preuves est appréciée, de l'extérieur même des mathématiques, comme un élément irremplaçable de la culture scientifique- Maintenir la rigueur en variant les approches, c'est un enjeu important de l'enseignement.

• *La réflexion sur la place des mathématiques dans la science, dans la culture et dans la société se fait jour maintenant plus vigoureusement qu'à d'autres époques.* Elle s'accompagne d'un renouveau de l'histoire des mathématiques, d'un développement original en France de leur didactique.

Il existe aussi des amorces, brillantes mais encore isolées, de rapprochements entre mathématiciens et philosophes- Dans l'histoire occidentale, mathématiques et philosophie ont eu les rapports les plus intimes et les plus orageux. Au-delà du divorce actuel, les mathématiques ont besoin, plus encore que les autres sciences, d'une réflexion globale sur leurs origines, leurs démarches, et ce par quoi elles participent à l'intelligibilité du monde. La vraie surprise réside en effet plutôt dans la fréquence extraordinaire avec laquelle des concepts créés par les mathématiciens pour des raisons qui leur étaient propres se révèlent pertinents dans d'autres sciences, ce que Eugène Wigner appelle *«l'efficacité déraisonnable des Mathématiques dans les Sciences de la Nature»*. Ce fait mérite certainement une réflexion plus approfondie de nature philosophique qui ne semble pas disponible actuellement.

4 - Le rôle spécifique des mathématiques : quelques exemples

Les mathématiques fournissent aux autres sciences aussi bien qu'à leurs propres branches des concepts et des outils. Nous avons déjà mentionné certains outils de «calcul», mais que seraient la mécanique, la physique, ou même la chimie, sans le cadre que leur procurent les structures algébriques, géométriques, ou probabilistes ?

Particulièrement dans la recherche fondamentale, les concepts et le langage des mathématiques, qui tend à l'universel, permettent l'unification et la compréhension des processus différents, au point de faire quelquefois d'elles un pont entre disciplines différentes. Le parallèle construit au XIX^e^ siècle entre phénomènes électriques et hydrauliques est un exemple de la nécessité de cette comparaison pour atteindre un niveau de compréhension supérieur. Les mathématiques, dont une des fonctions est d'établir des relations entre notions abstraites, permettent d'identifier des modèles qui ont la même structure, (Henri Poincaré n'expliquait-il pas que *«faire des mathématiques, c'est arriver à donner le même nom à des objets différents»)*. Un exemple moderne d'une branche des mathématiques où cette faculté est particulièrement visible est fourni par la théorie des systèmes dynamiques dont le champ d'utilisation s'étend de la biologie à la physique, de la mécanique à l'économie.

Un exemple : la recherche en Systèmes Dynamiques en France

L'étude des Systèmes Dynamiques a pris un développement considérable dans les 15 dernières années, dans le monde et tout particulièrement en France, C'est une branche des mathématiques qui met en jeu des outils très variés et a des applications dans des domaines très divers de la physique ou de la technique, de sorte que ses connexions avec les autres branches sont multiples.

Son domaine naturel d'application est, bien sûr, *l'étude de l'évolution autonome des systèmes,* qu'ils soient physiques, mécaniques, chimiques, biologiques, écologiques, économiques ou financiers... Cette étude est centrale en turbulence, en mécanique céleste, en technologie (exemple : la maîtrise des oscillations du TGV), Mais *a contrario* rappelons que des exemples aujourd'hui fondamentaux dans la théorie des systèmes dynamiques ont été introduits par le biologiste R. May, par le météorologue Lorenz, par l'astronome Hénon, par le physicien des solides Aubry. Cette théorie a aussi des applications dans lesquelles le «temps» du système dynamique n'est pas le temps habituel. C'est le cas en théorie de la renormalisation, qui étudie les phénomènes critiques et la mécanique statistique, où le passage du microscopique au macroscopique est vu comme une itération de changements d'échelles, le nombre d'Avogadro étant assez grand pour correspondre à une évolution à long terme.

En considérant les branches des Systèmes Dynamiques représentées en France, et en indiquant leurs relations avec d'autres branches (certains mathématiciens se partagent entre plusieurs tendances), nous pouvons donner plus de substances à ces affirmations.

L'étude de la dynamique hamiltonienne est proche de la géométrie sympleclique, mais voisine aussi avec les équations aux dérivées partielles non linéaires- Elle a des ramifications dans l'élude des modèles financiers, et l'étude des structures spatiales.

Partant des bifurcations dans les problèmes de turbulence (d'origine astrophysique et mécanique), donc en dimension infinie, une étude systématique a porté sur des problèmes de petites dimensions, et finalement sur certains types particuliers d'applications (parfois discontinues) de l'intervalle ou du cercle.

La dynamique en petites dimensions s'épanouit dès qu'on entre dans le champ complexe donnant naissance à la dynamique holomorphe qui intéresse directement certains physiciens théoriciens qui y trouvent une source d'interprétation de la renormalisation déjà évoquée précédemment. Signalons la relation étroite entre la dynamique holomorphe el l'étude des groupes kleiniens, donc des surfaces de Ricmann et de l'espace de leurs déformations. Un thème voisin est celui des feuilletages holomorphes ou transversalement holomorphes qui rejoint la théorie des équations différentielles singulières.

Parmi les concepts fondamentaux de la théorie des systèmes dynamiques figure celui d'attracteur. Un de ces avatars, le concept d'attracteur étrange dû au physicien Ruelle, peut se révéler la clef de la transition des systèmes ordonnés vers le chaos, et, à ce litre, a acquis droit de cité en mécanique statistique. De la même façon, la notion de variété stable apporte des points de vue nouveaux dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles, et convenablement généralisée, y compris dans le cas d'équations dissipalives comme les équations de Navier-Stokes. Les améliorations attendues devraient avoir des conséquences sur la simulation numérique.

Deux aspects importants de l'étude des Systèmes Dynamiques qui mériteraient d'être développés sont la recherche de mesures invariantes, qui mène à la Théorie ergodique, et la Dynamique symbolique, qui peut s'appliquer à certains problèmes de codage.

Si l'informatique interagit avec toutes les sciences en leur fournissant un outil et des concepts, son lien avec les mathématiques est consubstantiel. Le premier ordinateur moderne fut une machine idéale, la machine de Turing. Aujourd'hui, au contraire, les architectures parallèles se mettent en place avant qu'on en ait une théorie. C'est un défi pour les mathématiciens, et on voit des mathématiciens purs, comme W. Thurston, prendre la géométrie de telles architectures comme sujet de recherche- L'informatique abonde en problèmes stimulants pour les mathématiciens dont nous donnons maintenant un exemple spécifique-

Mathématiques et informatique un exemple pris en robotique

Les travaux actuels concernant les robots mobiles fournissent un bon exemple pour analyser les interactions profondes entre mathématiques et informatique.

Pour comprendre la problématique, imaginez que vous entrez dans une pièce les yeux fermés et les oreilles bouchées, mais en connaissant ses dimensions, sa forme, le nombre et la forme des objets qui l'encombrent. Vous souhaitez vous asseoir sur une chaise qui se trouve à l'autre bout, en évitant, bien sûr, de heurter les objets environnants. Avant toute chose, vous souhaitez savoir si vous pouvez faire un tel mouvement, et si oui faire cette action le plus vite possible. Cet exemple, simpliste, met en jeu des outils mathématiques et informatiques sophistiqués qui, à l'heure actuelle, ne permettent de résoudre qu'imparfaitement le problème dans toute sa généralité. Des solutions efficaces et programmables n'existent que pour des classes restreintes : déplacemenl d'un polygone ou d'un disque dans le plan ou dans un couloir, etc.

Savoir si le déplacement est possible met en jeu des procédures de décidabilité sur les nombres réels et des questions difficiles de logique. Les contraintes dues à votre morphologie et à l'environnement sont modélisées par un système d'équations et d'inéquations qu'il faut résoudre le plus rapidement possible. Cette partie est de loin la plus coûteuse. La structure utilisée pour représenter les transformations géométriques à effectuer a également une influence énorme sur le coût réel en temps et en place mémoire du programme que vous serez amenés à écrire : ici les quatemions présentent des avantages importants. Le problème se pose également de savoir comment spécifier ces contraintes. Par exemple, à l'heure actuelle, une inéquation est transformée en équation en introduisant une nouvelle variable réelle intervenant par son carré. Cette démarche a l'inconvénient d'introduire des variables supplémentaires alors que le bon sens mathématique indique qu'il faudrait en supprimer, d'où le besoin d'un langage de haut niveau permettant de spécifier et de résoudre efficacement ces contraintes numériques. Des travaux sont en cours dans ce domaine, les difficultés à surmonter relevant de la logique mathématique, notamment de la démonstration automatique. II s'agit de mécaniser le raisonnement et non plus de faire du calcul numérique. Lorsque les équations sont polynomiales, on utilise les outils du calcul formel (algorithmes de recherche de solutions d'équations polynomiales, factorisation, simplification des polynomes à plusieurs variables), mais les moyens actuellement disponibles sont très insuffisants-

La recherche de solutions effectives pour effectuer le déplacement souhaité passe aussi par la mise en œuvre d'algorithmes géométriques permettant de trouver rapidement l'intersection de polygones ou de polyèdres, de trouver l'enveloppe convexe de nuages de points, etc. Des solutions à ces problèmes existent, mais les performances réelles *(i.e.* en moyenne) des algorithmes correspondants sont encore très mal connues. Les lacunes existant actuellement dans le domaine des probabilités géométriques y sont pour beaucoup. Des travaux récents font appel à des résultats fins de topologie et géométrie algébrique (notamment sur les ensembles stratifiés). Récemment il a été possible de passer d'un coût en temps (dans le pire des cas) doublement exponentiel à un coût simplement exponentiel, puis simplement polynomial en place mémoire-

Il peut paraître assez surprenant que l'algorithmique des robots mobiles nécessite la mise en œuvre de techniques mathématiques aussi sophistiquées. Si les obstacles sont mobiles, les problèmes mathématiques sont encore plus difficiles et on ne sait pas les résoudre actuellement.

S - Vers la constitution d'équipes multi-disciplinaires

Dans le cadre du rapport nouveau existant entre la biologie et les mathématiques, les biologistes insistent sur la nécessité de développer des équipes interdisciplinaires. D'excellentes thèses de mathématiques sont issues de problèmes posés par la biologie, et particulièrement la neurobiologie, et leur qualité a dépendu d'un contact constant entre le chercheur mathématicien, le biologiste à l'origine du problème, et des mathématiciens bien avertis des méthodes modernes. La question des équipes interdisciplinaires, posée avec force par les biologistes, n'est-elle pas, audelà même de la biologie, une question-clef pour le développement d'interactions efficaces ?

Avec ces développements se pose en effet maintenant avec acuité le problème de chercheurs ayant une formation scientifique double comportant une composante mathématique- Ce problème de formation original est assez différent de celui de la formation d'ingénieurs généralistes, car le niveau de compétence requis est plus avancé, et, de plus, les buts poursuivis supposent une réelle familiarité avec le travail scientifique.

Plusieurs pays avancés (Etats-Unis, Grande-Bretagne, URSS) vont ou viennent de faire des efforts remarqués pour la constitution de centres de recherche par définition pluri-disciplinaires avec l'ambition de faire se rencontrer au niveau post-doctoral des spécialistes de domaines théoriques ou appliqués. La présence régulière de visiteurs français dans ces nouvelles institutions mériterait d'être envisagée.

EVOLUTIONS ET TENDANCES

1 - Un peu d'histoire

L'étude statistique élémentaire d'une récente encyclopédie des personnalités ayant vécu à l'époque de la Révolution de 1789 permet de dénombrer plus de 60 personnes qu'on pourrait appeler personnalités scientifiques; et on découvre qu'elles arguaient souvent de deux ou trois disciplines de référence : pharmacien et chimiste, médecin et naturaliste, physicien et géomètre, chimiste et mécanicien, linguiste et physicien, médecin et philosophe, et, du côté mathématique, astronome et cartographe ou topographe, ingénieur et mathématicien, et en particulier ingénieur de marine, mathématicien et philosophe ou humaniste, et même moraliste, puisque d'Alembert et

Laplace durent lutter pour établir «une distinction entre le mathématique et le moral». Et, depuis les controverses de Condorcet sur l'arithmétique politique, on sait bien que les frontières ne sont pas si nettes avec les finances, les assurances, et d'une manière générale avec les sciences économiques et sociales.

Il est assez remarquable que Ton ait tendance à considérer aujourd'hui comme application des mathématiques ce qui fut une création de branches mathématiques nouvelles en vue de résoudre des problèmes externes (exemples : Laplace et la théorie des probabilités, l'analyse à plusieurs variables et toute la physique de l'époque).

C'est à la fin du XIX[e] siècle que sont vraiment apparus les «mathématiciens professionnels»; longtemps la physique et surtout la mécanique étaient restées des disciplines inséparables des mathématiques. Cette spécialisation des mathématiciens s'est poursuivie et accentuée au XX[e] siècle pour culminer symboliquement avec le mouvement Bourbaki,

Depuis les années 70, les mathématiciens sortent d'une période de splendide isolement qui, si elle fut féconde pour leur propre discipline, fut très traumatisante pour leurs rapports avec les autres sciences. La période 1945-1970 fut en effet marquée par un changement d'état d'esprit des mathématiciens qui, s'appuyant sur les matériaux amassés par l'époque antérieure et les immenses succès de la méthode axiomatique, ont prêté une attention presque exclusive au développement de leur discipline à partir de ses problèmes internes en favorisant les structures fondamentales. Cette tendance au formalisme n'a pas touché seulement les mathématiques, mais s'est fait sentir dans plusieurs autres domaines de l'activité intellectuelle (structuralisme, linguistique, psychanalyse,,.,)•

Cette façon de concevoir les mathématiques est devenue, à des degrés divers, une norme dans tous les pays ayant une école mathématique importante, avec cependant des effets plus limités en URSS. Il faut reconnaître que, dans notre pays, le caractère dominant de ce point de vue dans les années 60 a contribué à étouffer les mathématiques appliquées. Ce phénomène s'est produit à une moindre échelle aux Etats-Unis car, grâce à une structure beaucoup plus décentralisée et à des avocats fondamentalistes convaincants, les applications des mathématiques ont continué à se développer, quelquefois au sein d'autres départements comme les départements de génie électrique.

À l'aube des années 90, cette page est résolument tournée. Il y a plusieurs exemples récents de découvertes spectaculaires proprement mathématiques dont l'origine se trouve dans d'autres sciences. On ne peut s'empêcher de citer les résultats sur la structure des espaces de dimension 4 obtenus après considération d'objets dont l'existence et l'intérêt avaient été soulignés par les physiciens théoriciens dans leur quête de modèles classiques des interactions fondamentales.

Solitons et systèmes intégrables

On désigne par solitons des modes de propagation non linéaires d'une grande stabilité. Ils interviennent dans diverses sciences ou technologies (physique, chimie, biologie et, plus récemment, dans les problèmes de communications par fibres optiques). L'aspect non linéaire implique l'usage d'une mathématique sophistiquée qui s'appuie sur de multiples branches de la discipline. La théorie des systèmes intégrables est le cadre qui convient à leur élude. Nous aborderons ici plus particulièrement celles qui sont développées en France.

Les systèmes intégrables donnent par réduction les systèmes hamiltoniens intégrables au sens de Liouville, Leur étude a suscité un regain d'intérêt en France pour la géométrie symplectique et l'étude des crochets de Poisson.

L'analyse des singularités en temps des solutions des équations aux dérivées partielles a entraîné une relecture des fameuses leçons de Stockholm de Painlevé et de nombreux travaux sur les fondements de la notion d'imégrabilité des équations différentielles ordinaires en petite dimension.

En même temps, on note un intérêt nouveau pour les théories de Lïouville sur les classes de fonctions qui s'obtiennent comme solutions d'équations différentielles intégrables par quadratures. Ce dernier sujet touche à des questions reliées à la géométrie algébrique réelle.

L'intégration des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites périodiques passe par la solution du problème de la linéarisation d'un flot sur une variété abélienne au moyen des fonctions thêta. Le sujet a donné lieu à des développements récents en géométrie algébrique (nouveaux types de solitons elliptiques par exemple).

La quantification des systèmes intégrables conduit aux problèmes les plus variés, comme l'étude des opérateurs de la chaleur sur les espaces symétriques par des méthodes probabilîstes, par exemple-

La théorie des symétries des systèmes quantiques, en particulier celle de la R-matrice introduite par un groupe de physiciens de Leningrad, aboutit à des développements de chapitres classiques de la géométrie différentielle avec l'usage des dérivations de l'algèbre extérieure. A signaler tout particulièrement le lien avec l'étude des déformations des crochets de Poisson bien développée en France.

Avec la théorie de la R-matrice, le sujet se rattache à 1'étude des systèmes de spins pour lesquels on peut calculer explicitement la fonction de partition. L'abord du fameux modèle d'Ising à trois dimensions reste un point d'achoppement. II ne peut être raisonnablement pensé sans une profonde réflexion sur les structures algébriques, comme la théorie de la R-matrice, qui ont rendu possible sa solution pour la dimension deux. Ceci suggère des connexions avec la théorie des C* algèbres et les nouvelles représentations linéaires des groupes des tresses qui sont prometteuses.

2 - Les moteurs de l'évolution

Les interactions avec les mathématiques conditionnent les progrès dans nombre de disciplines. Comme exemple saillant, rappelons l'attribution du prix Nobel de chimie 1985 à deux mathématiciens, Hauplman et Karle, pour les méthodes qu'ils avaient élaborées à partir de l'analyse de Fourier et des probabilités pour la détermination de structures cristallines, et la déclaration de W. Lipscomb au nom du Comité Nobel : *«The Nobel Prize for chemistry is all about changing the field of chemistry. And ihis work changea the field,»*

Inversement ces interactions enrichissent les mathématiques de problèmes, d'outils, de concepts, de théories. Si pour une bonne part la théorie des opérateurs de Hilbert vient de la mécanique quantique, la théorie moderne des systèmes dynamiques, que nous avons évoquée précédemment, s'est nourrie d'une floraison d'expériences, de simulations et de développements théoriques venant de biologistes et de physiciens. Le concept de fractal et ses récents avatars (analyse multifractale) viennent moins des mathématiques que du monde extérieur où s'affirme leur pertinence. Le progrès des mathématiques dépend pour une part importante de leur interaction avec les autres sciences.

La physique a un lien consubstantiel avec les mathématiques parce que la plupart des concepts de la physique n'attendent qu'une formalisation mathématique pour devenir des concepts mathématiques. Mais le rapport réel est actuellement beaucoup plus riche, *«La physique théorique moderne est un monde intellectuel rigoureux, luxuriant, absolument rabelaisien, où le mathématicien peut trouver de quoi rassasier tous ses appétits, excepté l'ordre qui lui est familier. Tenter d'introduire cet ordre, c'est pour un mathématicien une bonne incitation à une étude active de la physique.»* dit le mathématicien soviétique Youri Manin, L'interaction existe, à preuve l'excellente école organisée en 1989 aux Houches sur la physique et la théorie des nombres.

Les disciplines que l'on regroupe habituellement sous le nom de sciences humaines (sans être exhaustif, on peut citer démographie, économie, linguistique, psychologie, sociologie, géographie, histoire, archéologie, anthropologie) ont toutes connu, à des degrés divers, dans les années 60, un engouement pour les mathématiques en partie grâce à l'émergence de «nouvelles» mathématiques qui semblent particulièrement adaptées à leurs besoins. Diverses structures d'enseignement et de recherche ont été mises alors en place pour permettre une meilleure pénétration des deux cultures et former une nouvelle génération de chercheurs. Cet engouement est aujourd'hui un peu retombé, et la présence croissante de l'informatique a peut-être repoussé au second plan le débat sur l'apport des mathématiques aux sciences humaines qui a quelque fois été âpre. C'est dans le cadre de ces sciences que la légitimité de **l'utilisation** de «modèles mathématiques» a été l'objet des discussions sur le fond les plus approfondies. Cela ne doit pas cacher le fait que le mode d'intervention des mathématiques dans ces sciences est extrêmement divers : illustration de thèses, comptages, démarche plus déductive jusqu'à l'axiomatisation, étude complète de modèles plus ou moins élaborés. Là encore, la demande en direction des mathématiciens a eu des retombées internes, de la théorie des jeux au développement des mathématiques discrètes et de la combinatoire en passant par l'élaboration de critères statistiques.

Les progrès des mathématiques procèdent donc de deux pôles complémentaires, *a priori* opposés» les problèmes internes et les problèmes externes.

• *Les problèmes externes* qui ont contribué et contribuent toujours aux progrès des mathématiques proviennent de sciences très différentes comme la mécanique, la physique, l'astronomie; à celles-ci se sont ajoutés plus récemment les problèmes fournis par la biologie, la météorologie, l'informatique, l'économie et les sciences sociales, la transmission et la sûreté des données, et plus généralement les problèmes industriels ou économiques. Pour ne citer qu'un exemple parmi ce dernier groupe de disciplines, notons les stimulations venues de l'économie et des sciences sociales pour développer la théorie des jeux, ou encore le développement du calcul différentiel peu régulier (sous-différentiel) pour rendre compte des «fonctions de préférence» utilisées en économie.

• Différant peu en cela de ses collègues d'autres disciplines, le mathématicien cherche à comprendre, à expliquer, à classifier, à faire rentrer dans un cadre général, à ramener à un petit nombre d'idées simples des faits qu'il a pu (su) constater. *Les problèmes internes* sont des questions au sein des mathématiques dont la résolution entraînerait, estime-t-on, des progrès substantiels. En fait, souvent, les progrès viennent autant des outils, des structures et des concepts créés pour essayer de résoudre un problème ayant résisté aux attaques de mathématiciens chevronnés que du résultat lui-même. Les préoccupations internes relèvent souvent de la curiosité intellectuelle, voire de l'esthétique; il s'agit notamment de résoudre des problèmes qui soient conceptuellement forts, compacts quant à leur formulation et naturels dans la problématique d'une sous-discipline des mathématiques.

• Mais, de la même manière que les problèmes externes poussent aux progrès des mathématiques, *la résolution des problèmes internes permet ensuite, grâce aux outils, concepts et structures dégagés à cette occasion, de résoudre des problèmes externes*. Ainsi les structures linéaires, créées en grande partie pour les besoins internes, ont eu un immense succès en modélisation pour la physique et la mécanique; de même la théorie de la démonstration et le l-calcul typé, créés pour des besoins d'une des parties les plus arides de la logique, trouvent des applications importantes en informatique. La distinction entre ces deux pôles de l'inspiration mathématique est moins forte qu'il n'y paraît- Dans les deux cas, les progrès dans un domaine des mathématiques naissent des difficultés rencontrées pour résoudre un problème d'un autre domaine qui peut être mathématique, scientifique, industriel, financier, économique, etc.

Quelques exemples de polyvalence

Citons, par exemple, la théorie des nombres qui fut et est encore à l'origine de progrès en théorie des fonctions de la variable complexe (pour l'étude de la répartition des nombres premiers, pour la transcendance par exemple), à la source de nombreux concepts d'algèbre linéaire et de théorie des groupes (pour les besoins de la théorie algébrique des nombres) et à l'origine de concepts et d'outils de géométrie algébrique (pour les problèmes diophantiens). Tous ces outils et ces concepts ont ensuite prouvé leur utilité en physique (solitons,...) en mécanique, en codage (codes géométriques) et en cryptage (codes à clefs publiques...), plus anecdotiquement en CAO (géométrie algébrique réelle...) et en robotique (problème du déménageur et géométrie algébrique réelle).

De manière antinomique l'astronomie, avec Poincaré, la météorologie, avec Lorenz, et la biologie sont à l'origine et ont contribué fortement aux progrès des systèmes dynamiques en donnant le cadre, en posant des problèmes difficiles et en aiguillonnant les mathématiciens pour leur faire donner des réponses là où les méthodes classiques étaient incapables d'en donner (stabilité de trajectoires...). Enfin, dans le cas des ondelettes, le concept est venu d'au moins trois horizons différents : de préoccupations purement internes aux mathématiques, de préoccupations de physiciens et enfin d'ingénieurs.

DEVELOPPER LES INTERACTIONS : OBSTACLES ET EXEMPLES

Pasteur estimait qu'// *n'y a pas de bonnes sciences appliquées sans bonnes théories*.- Bien qu'une théorie ne se prête pas nécessairement à une formulation mathématique (cf. *a contrario* la tendance actuelle à utiliser le vocabulaire et certains des concepts de la biologie en informatique), une partie appréciable d'entre elles la permet. Pour pouvoir utiliser cette formulation, il est indispensable d'identifier les obstacles que l'on rencontre dans cette démarche.

1 - De la difficulté des interactions

Si les mathématiques reviennent, ces dernières années, à des rapports plus ouverts avec les autres sciences, ceux-ci n'ont pas toujours été sereins. On prête à H. Weyl (1919) une phrase selon laquelle les rapports entre physique et mathématiques sont ceux d'un couple qui se dispute dans la journée et qui, la nuit, dans l'obscurité, se féconde. Les physiciens rêveraient d'un supermarché des mathématiques dans lequel ils trouveraient les outils dont ils ont besoin quand ils en ont besoin, alors que les mathématiciens s'irriteraient, voire seraient exaspérés, que leurs outils et leurs concepts soient ignorés ou mal utilisés.

Cette constatation n'épuise pas la liste des difficultés rencontrées dans les interactions, car de nombreux problèmes mathématiques issus d'autres sciences sont actuellement bloqués par carence d'outils adaptés. Les mathématiciens ne sont en effet pas toujours capables de répondre de manière satisfaisante aux questions qui leur sont posées au moment où la question est posée-

Plusieurs raisons concourent à cet état de fait. Supposons qu'on soit parvenu à bâtir un modèle mathématique pertinent d'un phénomène, mais que son traitement conduise à des problèmes hors de portée des techniques mathématiques du moment- Si le problème est jugé intéressant par les mathématiciens, ils s'en saisissent, le structurent, isolent les difficultés et éventuellement le résolvent, mais dans un temps sans rapport avec les délais couramment acceptés par les utilisateurs. En effet un théorème est toujours vrai, un concept mathématique toujours utile, 2000 ans après sa découverte ou sa démonstration, ce qui est rarement le cas dans d'autres disciplines scientifiques et certainement jamais dans le monde économique. Néanmoins, il arrive souvent que les progrès réalisés en mathématiques à cette occasion puissent servir pour apporter une réponse à un autre problème.

Il peut se faire aussi que, faute d'avoir encore pu dégager les paramètres pertinents et les interactions fondamentales d'un phénomène, on ne réussisse pas à obtenir un modèle raisonnable et efficace. C'est encore souvent le cas en biologie et en économie. Mais, même dans ce cas, les mathématiques ont leur utilité en montrant l'absurdité ou les limites des modèles parce qu'elles permettent d'en envisager toutes les conséquences.

Si le front des interactions s'est entre-temps considérablement élargi, les difficultés de communication restent nombreuses. Les résultats obtenus dans des langages différents avec des problématiques différentes nécessitent souvent des années d'adaptations mutuelles pour être compris par les deux parties et finalement fusionnés dans un embryon de culture commune. Dans une théorie donnée, les concepts importants diffèrent souvent pour le mathématicien et pour l'autre spécialiste, d'où la difficulté à accepter le point de vue de l'autre et à lire ses publications. II est dès lors indispensable d'établir des «dictionnaires» qui permettent de se convaincre que l'on parle d'un même concept (un exemple récent en est fourni par les approches différentes du groupe de renormalisation en physique et en mathématiques).

2 - Les limites des interactions

Comme le nombre de mathématiciens professionnels est limité, et que leur capacité à embrasser des champs radicalement nouveaux est un peu freinée par l'exigence du milieu de ne publier que des résultats réellement profonds, tout nouveau domaine d'interaction nécessite, presque à chaque fois, une nouvelle génération de mathématiciens. Dans l'organisation actuelle de leur communauté, les mathématiciens sont donc assez lents à réagir.

L'interaction n'est pas non plus favorisée par les modes de travail de l'enseignement, et particulièrement de l'enseignement secondaire (on peut, par exemple, regretter que les professeurs de lycées et de collèges n'aient pas plus de contacts avec les utilisations des mathématiques à cause, notamment, de l'absence de documents appropriés).

Un autre frein à l'interaction, peut-être plus irrémédiable, provient des objectifs et des états d'esprit différents : les mathématiciens se suffisent du déroulement harmonieux d'une théorie, ils sont moins sensibles par formation à la notion de paramètre pertinent et aux limites de la modélisation. Les théories mathématiques ont une durée de vie très longue (les mathématiques sont en quelque sorte intemporelles), les mathématiciens sont perfectionnistes et plus sensibles à la difficulté du résultat qu'à son utilité (ainsi la découverte d'une nouvelle démonstration plus élégante d'un résultat ancien est-elle bien appréciée des mathématiciens, car elle prouve une compréhension plus profonde de la nature du résultat). La distinction entre mathématiques appliquées et mathématiques pures est alors plus une question d'état d'esprit que d'applicabilité réelle des résultats ou de qualification des outils de travail. Les mathématiciens appliqués sont en effet obligés d'inclure la dimension de service dans leur travail, ce qui peut les amener à se réorienter si leur champ mathématique n'est plus en prise avec un domaine potentiel d'application.

3 - Des rapports fructueux...

Quand, surmontant les difficultés énumérées plus haut, une véritable interaction s'établit, alors les succès sont souvent étonnants et le travail passionnant. Au risque ici de sacrifier à la mode, nous donnons un bref aperçu de l'aventure très récente (et exemplaire) des *ondelettes,* fruit d'une interaction entre ingénieurs, physiciens théoriciens et appliqués, spécialistes du traitement du signal ou de l'image, et mathématiciens.

Les ondelettes

Rappelons l'histoire. Un ingénieur, Jean Morlet, travaillant pour la prospection pétrolière, introduit un procédé nouveau pour analyser les signaux reçus en écho à un signal émis. Il définit une «ondelette» produit d'une sinusoïde et d'une fonction de Gauss, et utilise un ensemble discret de fonctions déduites de ce modèle par translation et dilatation pour lester le signal. Il met en évidence une formule simple, approchée mais remarquablement précise, pour la synthèse, i.*e*. la reconstitution du signal à partir des coefficients mesurés. En collaboration avec un physicien théoricien, il démontre une version continue exacte de ces formules. Cependant une question posée par le succès de la formule discrète restait ouverte : quitte à changer la fonction de base, peut-on développer toute fonction raisonnable (disons de carré intégrable) selon le système discret ? Les premiers travaux sur la question associent deux physiciens théoriciens et un mathématicien pur. En septembre 1985, une réponse apparemment définitive au problème est donnée par le mathématicien; pour une fonction de base convenable (de la classe de Schwartz et orthogonale à tous les polynômes), les fonctions obtenues par translation et dilatation à partir de cette fonction forment une base orthonormée de l'espace des fonctions de carré intégrable. On doit noter que d'autres ingénieurs comme C. Galand s'étaient peu auparavant posé des questions analogues.

Immédiatement ces ondelettes modifiées sont tabulées et utilisées dans les calculs, parallèlement aux ondelettes originelles. Les séries en ondelettes reflètent les propriétés locales des fonctions beaucoup mieux que les séries de Fourier. Les bonnes classes de fonctions donnent lieu à de bonnes classes de coefficients. En analyse fonctionnelle, c'est un outil remarquable : des théorèmes difficiles sur l'isomorphisme d'espaces fonctionnels s'obtiennent naturellement et facilement en passant aux espaces de coefficients en ondelettes. Les séries de Haar apparaissent comme un prototype. Les diverses décompositions atomiques, introduites en analyse fonctionnelle au cours des années précédentes, sont remplacées par un outil puissant et général.

Un outil important permettant des algorithmes efficaces et la construction de classes étendues de bases orthonormales est l'analyse multiéchelle qui trouve son origine dans les problèmes de traitement d'images. Les filtres miroirs en quadrature, couramment utilisée en théorie du signal, s'intègrent au cadre des ondelettes. Le «niveau bas» de la vision, c'est-à-dire ce qui est accessible aux robots, fait l'objet d'études utilisant les ondelettes. Dans le traitement du son, une version continue des ondelettes originelles fournit un bon instrument à la fois pour l'analyse, la transformation et la synthèse. Pour l'élude de fractales intervenant en chimie ou d'écoulements turbulents, dans l'analyse fine des mesures singulières que constitue l'analyse multifractale, l'identification des lignes spectrales en RMN, la nouvelle transformation de Morlet (avec un codage approprié des intensités et des phases) s'avère intéressante pour la reconnaissance des formes et pour l'extraction algorithmique des paramètres pertinents. Par la redondance-même de l'information qu'elle fournit, elle est un remarquable instrument d'analyse.

En physique théorique, dont elles sont pour une part issues, les ondelettes ont aussi montré leur utilité- La version continue apparaît comme une variante «affine» des représentations en états cohérents, utilisés depuis longtemps en mécanique quantique. Un choix approprié de l'ondelette de base a permis d'étudier la quantification de certains systèmes dans un espace de Hilbert bien adapté de fonctions analytiques. Les bases orthonormales d'ondelettes ont été utilisées dans l'étude de certains problèmes de la théorie quantique des champs.

Inutile de poursuivre : les ondelettes jouent un rôle fédérateur pour des disciplines diverses, ayant chacune leur objet et leurs méthodes, soit en fournissant un outil nouveau, facile et puissant, soit en intégrant dans un cadre largement accessible des pratiques et connaissances naguère dispersées. En retour, des problèmes particuliers à ces disciplines ont servi à enrichir le contenu mathématique de la théorie.

C'est aussi un champ mouvant et en progrès. À côté des ondelettes d'origine, on a maintenant tout un arsenal diversifié. Le champ des ondelettes découvre aussi ses précurseurs. Dans l'avenir proche, outre les applications déjà mentionnés, il faut mentioner deux enjeux. Le premier est la réduction des données. Le second, spectaculaire et en plein développement, est le calcul rapide des transformations intégrales et matricielles; des mathématiciens américains ont trouvé un algorithme dont la rapidité concurrence celle de la transformation de Fourier rapide dans les problèmes où celle-ci s'applique, et dont le champ est beaucoup est plus étendu.

Dans ces développements, à côté de participations étrangères importantes, les Français ont joué un rôle décisif. Le CNRS a su jouer son rôle en confiant à un de ses laboratoires propres la gestion d'un groupe de recherche sur les ondelettes.

4 - Un mode d'interaction en forte croissance : la modélisation

La modélisation mathématique n'est pas une création récente. Elle trouve cependant, en partie à cause des possibilités actuelles de calcul fournies par les ordinateurs, des champs nouveaux où intervenir. Par les structures dont elle munît le phénomène étudié, elle permet de bien dégager les effets de causalité, les paramètres significatifs. Par les rapprochements qu'elle autorise entre modèles isomorphes, elle permet de faire passer l'intuition et la problématique d'un domaine dans un autre (voir par exemple les rapprochements étonnants découverts récemment entre géométrie arithmétique et théorie quantique des champs). Grâce aux classifications internes auxquelles elle donne accès, elle permet aussi de pressentir *a priori* un certain nombre de comportements qualitatifs, et ceci même si la modélisation conduit à un modèle mathématique non soluble exactement par les mathématiques actuelles (c'est le cas, par exemple, pour l'ensemble des modèles relevant d'un type donné d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, elliptiques, hyperboliques ou paraboliques, alors que les mécaniciens sont amenés à utiliser des équations dont le type est variable en fonction des points du domaine). Elle permet aussi une grande économie de pensée puisque, au moins dans les meilleurs des cas, elle fournit des procédures systématiques de résolution et d'étude.

Cependant on ne peut modéliser qu'avec les outils dont on dispose : modèles linéaires ou non, discrets ou continus, à une ou plusieurs variables, stochastiques ou déterministes, dépendant du temps ou non,... Souvent le bagage mathématique du modélisateur est le facteur déterminant pour fixer la nature du modèle, cette donnée devient plus importante que le phénomène lui-même. On voit d'ailleurs, grâce aux progrès récents des probabilités et à leur diffusion, apparaître de plus en plus de modèles incorporant de l'aléatoire. Une bonne modélisation demande donc des scientifiques très expérimentés en mathématiques pour pouvoir s'affranchir des problèmes techniques au moment de la conception de leur modèle.

Les mathématiques de la vision artificielle

La vision artificielle illustre les considérations qui précèdent. Le domaine, bien qu'inspiré par la vision animale, intéresse en particulier la robotique, l'imagerie aérienne et l'imagerie médicale. On distingue le bas niveau (prétraitement des informations locales concernant les contours, les couleurs, les textures, les vitesses dans le cas de séquences d'images) et le haut niveau (segmentation, c'est-à-dire découpage en morceaux, et surtout traitement sémantique, c'est-à-dire reconnaissance d'objets tridimensionnels, suivi de trajectoires, interprétalions).

L'approche algorithmique explicite et séquentielle des vingt dernières années commence à être remplacée par une algorithmique distribuée et souvent implicite, domaine en pleine ébullition, encore très jeune.

Le bas niveau qui s'inspire des méthodes de traitement de signal est maintenant modélisable sous la forme d'un réseau de processeurs, dont chacun évalue l'état environnant, et décide en fonction de cela son propre changement d'étal. L'évaluation et la décision font généralement intervenir une fonction d'énergie, qu'il s'agit de faire décroître vers un minimum relatif ou absolu. Selon les cas, les changements d'étals sont synchrones ou asynchrones, déterministes ou stochastiques. Les interactions dans le réseau créent donc une dynamique, déjà justiciable de tout un arsenal mathématique, emprunté à la mécanique statistique (mesures de Gibbs-Boltzman), aux probabilités (algorithmes stochastiques et champs markoviens), à la recherche opérationnelle (optimisation massive). Ces modèles incluent aussi les réseaux de neurones formels (concept d'origine biologique, mais qui, sous sa forme abstraite, intéresse également l'informatique, la physique, les mathématiques). Les simulalions informatiques s'appuient sur des ordinateurs à architecture parallèle.

Le haut niveau est lui aussi justiciable d'études mathématiques, quoique, pour le moment, ce domaine soit assez inextricable. Les systèmes de cartes locales, si détaillées soient-elles, ne donnent qu'une idée grossière de la façon dont le cerveau traite la vision. Cependant, les réseaux neuronaux classifiants (c'est-à-dire dont une partie, appelée sortie, permet de classer suivant une grille ce qui se passe dans une autre partie, appelée entrée), et l'heuristique explicite (dont le codage est l'objet des systèmes experts) donnent des méthodes d'attaque.

Les études sur la vision artificielle se rattachent, à cause de la communauté des modèles et des problèmes, à des secteurs vitaux de l'industrie (la robotique, la conception et la réalisation des ordinateurs parallèles). Ce dernier secteur s'appuie sur la microélectronique et sur l'informatique théorique (théorie des langages parallèles).

Mais si les mathématiques apportent une aide à la compréhension, elles ne peuvent en aucun cas remplacer la réflexion sur le phénomène étudié et sur la pertinence du modèle. Un modèle ne contient que ce qu'on y a mis, le rôle des mathématiciens est de faire accoucher le modèle de tout ce qu'il contient, au besoin en rendant accessible des informations provenant d'autres disciplines grâce aux rapprochements suggérés par le traitement mathématique du modèle.

Il est certain que l'utilisation de mathématiques peut devenir un danger quand elles ne servent qu'à jeter de la poudre aux yeux en camouflant sous un développement brillant l'absence de réflexion sur le phénomène étudié.

Un bon modèle, une bonne théorie doivent être prédictifs et pouvoir être confrontés à la réalité expérimentale (le rôle des expériences cruciales a été souligné par Karl Popper), même si parfois la modélisation est utilisée quand précisément l'expérience est difficile, voire impossible (industries spatiales, nucléaires, sciences économiques, médicales,...).

Théorie du contrôle optimal et fusion thermonucléaire

La fusion par confinement magnétique est l'une des approches développées actuellement pour atteindre l'ignition dans le domaine de la fusion thermonucléaire; elle consiste à soumettre le plasma (gaz ionisé) à un champ magnétique intense de façon à la confirmer. Le Tokamak est le dispositif expérimental le plus prometteur dans cette filière. Les équations macroscopiques régissant le comportement du plasma sont celles de la magnélohydrodynamique. Les équations régissant l'équilibre axisymétrique du plasma sont les équations elliptiques non linéaires du flux du champ magnétique (équation de Grad-Shafranov et équations de Maxwell),

L'identification de la frontière libre du plasma à partir des mesures magnétiques effectuées sur la chambre à vide du Tokamak TORE SUPRA, construit par l'association EURATOM-CEA à Cadarache, a été faite en résolvant un problème inverse (à savoir un problème de Cauchy pour une équation elliptique) par une technique de «moindres carrés généralisés» avec régularisation. Cette technique d'identification est mise en œuvre sur un microprocesseur, qui pilote le contrôle en temps réel de la forme du plasma.

Dans le Tokamak européen JET, c'est le profil de densité de courant du plasma qui est identifié à partir des mesures expérimentales (magnétiques et cinétiques), en utilisant une formulation par moindres carrés qui transforme le problème en contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles.

La théorie du contrôle optimal des systèmes régis par les équations aux dérivées partielles consiste à étudier la minimisation d'une fonctionnelle dépendant de la solution d'une équation aux dérivées partielles par rapport à un contrôle intervenant soit dans l'équation (contrôle distribué), soit dans ses conditions aux limites (contrôle frontière). Cette théorie s'applique soit à l'étude de la commande optimale de processus régis par des équations aux dérivées partielles, soit à la résolution de problèmes inverses et, en particulier, de problèmes d'identification de paramètres.

LA SITUATION GENERALE ET INSTITUTIONNELLE

Après une période de repliement consacrée à la mise au point de nouveaux concepts qui mettront peut-être des décennies pour passer au niveau des utilisateurs de mathématiques, l'ouverture des mathématiques et des mathématiciens vers les autres sciences et les applications industrielles est maintenant un phénomène très général dans le monde. Comme les domaines des mathématiques concernés par les interactions sont extrêmement divers, il est dès lors indispensable d'examiner la situation d'un point de vue plus institutionnel, ce qui passe notamment par une description des forces et des faiblesses de la communauté mathématique, de son mode d'organisation, et aussi, dans la société de plus en plus médiatique dans laquelle nous vivons, de la perception qu'en a l'extérieur.

- Une image contrastée

L'image des mathématiques dans le public et parmi les élèves est aujourd'hui un obstacle à leur diffusion. Comment rectifier cette image ? Comme l'ont compris les associations organisatrices du colloque «Mathématiques A Venir» en décembre 1987, c'est un enjeu important si l'on veut qu'un nombre plus grand de jeunes filles et de jeunes gens envisagent les mathématiques comme un métier possible. Mettre en scène les mathématiques dans leurs interactions peut être de nature à mieux en faire comprendre, et donc apprécier, les ressorts fondamentaux en gommant le caractère «arbitraire» que leur enseignement prend parfois.

L'image des mathématiques et des mathématiciens n'est pas nécessairement bonne chez les utilisateurs. Une des causes est intrinsèque, et tient au mode d'intervention des mathématiques elles-mêmes dans le travail d'un modélisateur. Il y a en effet à la fois une fascination devant une modélisation mathématique sophistiquée et une frustration devant la dépossession qu'elle représente. Le traitement mathématique du modèle peut échapper au modélisateur, voire occulter la réalité du phénomène.

C'est à propos du comportement des mathématiciens que les mauvaises langues s'en donnent le plus souvent à cœur joie. Ils ne serviraient qu'à mettre des explications après coup, en utilisant un vocabulaire obscur et pédant digne des médecins de Molière. Ils seraient en général incapables de répondre simplement et précisément aux questions qu'on leur pose. Ils couperaient les cheveux en quatre en introduisant des hypothèses restrictives dont il est difficile d'établir la véracité et qui sont, en fin de compte, sans intérêt puisque le calcul marche et donne des prédictions réalistes. Ils généraliseraient sans objet le problème posé. Enfin, ils se comporteraient en donneurs de leçons et prétendraient expliquer aux expérimentateurs et même aux théoriciens de toutes spécialités ce qu'ils doivent faire et comment ils doivent le faire.

Certaines de ces critiques, même si nous leur avons donné quelquefois une formulation excessive, visent des comportements dont l'existence est un obstacle réel au développement des interactions. Elles méconnaissent cependant la nature profonde de la science mathématique, et, prises au pied de la lettre, lui refusent une existence indépendante au mépris des résultats malgré tout assez impressionnants à mettre à l'actif des mathématiciens- Parmi les conséquences des résultats, souvent spectaculaires, obtenus suite à des interactions tant internes qu'externes des dernières années, on devrait compter une amélioration assez sensible de cette image. Cette «pacification» devrait être ainsi parachevée.

2 - La place des mathématiques françaises

L'école française de mathématiques a été, et reste probablement, une des premières du monde. Elle a joué un rôle particulièrement important pendant la période de rapide développement, essentiellement interne, des mathématiques qui a suivi la Deuxième Guerre Mondiale- Elle a su suivre de très près le mouvement d'ouverture grâce à l'expertise accumulée pendant la période précédente, mais elle n'en a pas pris la tête à cause probablement de l'absence de recrutements de jeunes dans la période 1973-1985. La France est cependant en bonne place dans ce mouvement, et dans toutes les branches on peut estimer que la mutation est en cours.

Le manque de recrutement de jeunes pendant cette période, et l'âpreté de la compétition pour obtenir le moindre poste, même sous-qualifié, a privé la recherche mathématique de bons esprits à lancer sur des pistes radicalement nouvelles (donc assez risquées). Les mathématiciens actifs déjà en place ont souvent bâti leur propre domaine de recherche, leur réorientation ne peut donc se faire que lentement (si tant est qu'il faille la faire). A vouloir suivre toutes les modes, on court aussi le risque de perdre des compétences. Il faut se souvenir qu'en mathématiques, peut-être encore plus que dans d'autres sciences, il est difficile sinon impossible de prévoir quels seront les théories et les résultats qui se révéleront utiles demain pour les applications (cf. la logique et la théorie de la démonstration en informatique, la théorie des nombres en cryptographie, la géométrie algébrique pour l'étude des solitons, l'analyse micro-différentielle en physique,...).

Le taux de renouvellement de la section 03 du CNRS est toujours resté élevé grâce aux départs des chargés de recherche comme professeurs (toujours supérieur à 4%, et actuellement supérieur à 8% à cause de la reprise des recrutements universitaires) et aussi à cause d'une «évaporation» en direction des Etats-Unis, encore peu importante en nombre, mais qui pourrait se révéler déstabilisatrice à cause de la qualité des partants. Ce taux élevé de renouvellement est atteint sans départs à la retraite (un seul départ depuis 10 ans et aucun avant plusieurs années).

3 - Le CNRS et l'Université

Le centre de gravité de la recherche mathématique française se trouve aujourd'hui à l'Université (il y a en effet 2300 à 2500 mathématiciens dans les universités contre 250 à 300 chercheurs mathématiciens au CNRS) alors même que les mathématiques sont sous-encadrées à l'Université (elles sont à environ 70% de la norme Garaces, et le nombre d'étudiants demandant des enseignements mathématiques augmente et augmentera).

Ce déséquilibre CNRS-Université est partiellement la conséquence d'une politique choisie dès les années 1950 par la communauté des mathématiciens, politique qui donnait la priorité à l'Université sur le CNRS et au maintien d'un corps d'enseignants-chercheurs de haut niveau - compétitifs sur le plan de la recherche et disséminés sur le territoire national - sur la création d'un corps de chercheurs permanents. Dans cette optique (opposée de celle des disciplines voisines comme la physique, la chimie et la biologie), le CNRS n'était vu que comme un lieu de formation de chercheurs; après quelques années au CNRS (de 1 à 8 en moyenne), le chercheur prenait un poste de professeur à l'Université. Les mathématiciens ne demandaient pratiquement pas de postes de Directeurs de recherche. Ils se satisfaisaient de quelques détachements de chercheurs universitaires de très haut niveau sur des postes de Directeurs de recherche du haut de l'échelle.

Cette politique a parfaitement fonctionné tant qu'il y eut des postes à l'Université. Hélas ! Lorsque le recrutement universitaire s'est tari, il a fallu opérer une révision déchirante, qui a provoqué des débats assez âpres au sein de la communauté. Comme la politique de rechange n'avait pas été préparée, et que les modifications du fonctionnement de la communauté (notamment dans ses rapports avec les autres sciences et avec l'industrie) n'étaient perçues que lentement, les mathématiciens n'ont pu éviter que le blocage du recrutement ne frappe de plein fouet l'école mathématique française. Grâce au CNRS, l'étouffement complet a tout de même pu être évité.

Dans le même temps, la structuration plus forte de la communauté mathématique en laboratoires thématiquement centrés, la création de laboratoires non-universitaires, comme ceux de certaines Grandes écoles (École polytechnique et Écoles normales supérieures de Paris et de Lyon, bientôt d'autres), l'ouverture vers les applications industrielles ont permis une réévaluation de la politique initiale. En effet, si les laboratoires non-universitaires ne disposent pas du potentiel de recherche mathématique des universités, ils ne dépendent pas des flux d'étudiants (notons que, pour l'instant encore, les flux d'étudiants de troisième cycle ne sont pratiquement pas pris en compte pour l'attribution de postes). Là encore, c'est essentiellement le CNRS qui a donné l'occasion à la communauté de réfléchir sur son devenir.

En mathématiques, pour les raisons exposées plus haut, la place du CNRS est aujourd'hui celle d'une force d'incitation, de proposition- On doit cependant constater que cette situation n'est pas vraiment satisfaisante- La faiblesse de l'apport financier (malgré une augmentation significative dans les toutes dernières années) et le manque de cadres A au CNRS en mathématiques freinent certains types d'actions (liaisons avec l'industrie, continuité de certaines recherches, développement de laboratoires non-universitaires,,,). De plus il est difficile de compenser le fait que les postes universitaires sont attribués uniquement sur des critères d'enseignement.

Notons que les moyens d'action complémentaires du CNRS que sont les Groupes de Recherches Coordonnées, les Programmes de Recherche Coordonnés et les Actions Spécifiques, permettent les rapprochements interdisciplinaires s'ils sont bien utilisés.

4 - Des spécialistes de premier plan

Le système actuel de cloisonnement par disciplines favorise, s'il est bien utilisé, l'émergence de spécialistes de tout premier plan dans des domaines performants. S'il atténue les effets de mode, il ne permet les évolutions que si les collègues qui gèrent les disciplines sont fermement convaincus de leur nécessité. Ce schéma, général pour le système universitaire français, s'est appliqué aux mathématiques qui possèdent, sur un front presque continu de sous-disciplines des mathématiques, des spécialistes reconnus internationalement.

Notons que, si le statut de la fonction publique a ses lourdeurs, ses inconvénients, il permet toutefois d'avoir des chercheurs travaillant sur le long terme parce que libérés de la nécessité de trouver un autre contrat, un autre poste à durée déterminée, et donc de la tentation de publier des articles uniquement pour faire nombre. Dans une période où le flux des emplois mis au concours est suffisant et régulier, cette situation est une chance à exploiter.

Les départements de mathématiques et les laboratoires universitaires, CNRS ou autres, ont aujourd'hui tendance à s'organiser autour d'une sous-discipline (quelques intitulés de laboratoires de mathématiques : laboratoires de probabilités, d'analyse numérique, de problèmes diophantiens, de théorie des groupes finis, d'arithmétique et géométrie algébrique, de logique mathématique,...) avec tous les risques que représente la monoculture, mais aussi avec la possibilité de faire émerger des laboratoires mondialement reconnus dans leur spécialité.

5 - Et l'interdisciplinarité ?

Les interactions entre chercheurs et entre disciplines n'échappent pas aux structures. Le cloisonnement par disciplines du CNRS et de l'Université (et particulièrement des recrutements et de l'évaluation des chercheurs), s'il favorise l'émergence de spécialistes comme nous l'avons souligné, ne concourt pas à l'interdisciplinarité. Par exemple, il n'existe pratiquement pas en France de départements intégrés associant des spécialistes de domaines différents comme il en existe quelquefois aux USA. Les changements d'orientations, les thèmes de recherche communs à plusieurs sections, les applications industrielles ont du mal à être pris en compte par les instances actuelles.

On doit cependant constater que les travaux interdisciplinaires impliquant des mathématiques sont assez souvent peu pointus et la section 03 ne les apprécie donc qu'au prix d'un gros effort, car demeure dans la tête des évaluateurs la crainte de se voir flouer par un charlatan profitant des trous du système. Pour l'instant la plupart des cas de travaux interdisciplinaires se sont réglés au coup par coup, souvent à l'aide de postes mis en commun entre départements (en fait presque toujours au niveau de la direction générale, du conseil scientifique ou des jurys d'admission). Un des problèmes délicats non résolus est donc la mise au point d'une méthodologie pour juger les travaux de ce type. Les commissions du CNRS et celles du CSU sont bien équipées pour juger de la valeur d'un arithméticien, d'un géomètre, d'un analyste numéricien fondamentaliste, d'un probabiliste; elles le sont déjà moins pour juger de l'intérêt de travaux de géométrie appliquée aux probabilités ou à l'arithmétique, et elles sont presque désarmées pour juger de travaux de mathématiques appliquées à la biologie, à la physique, à la mécanique ou aux sciences humaines. Curieusement, elles se sentent parfois plus à l'aise dans le jugement des applications industrielles où, convaincues de leur incompétence, elles se reposent pour leur jugement sur la réputation des industriels et des banquiers à ne pas gâcher d'argent.

QUELS CHANGEMENTS ?

Comme nous l'avons, nous l'espérons, illustré, le mouvement d'interpénétration de l'ensemble des sciences, auquel on assiste dans la plupart des pays industrialisés depuis 10 ou 15 ans, n'a pas laissé de côté les mathématiques françaises- Ce mouvement s'accompagne, à l'intérieur des mathématiques, d'un abaissement des frontières entre mathématiciens purs et appliqués.

En fait, maintenant, c'est plutôt à l'intérieur de chaque sous-discipline des mathématiques que passe la frontière entre fondamentalistes et appliqués. Elle caractérise d'ailleurs plutôt l'état d'esprit d'un individu ou d'un petit groupe d'individus vis-à-vis de l'objectif à court ou moyen terme de son travail. Parmi les analystes numériciens, on trouve des théoriciens dont les travaux sont aussi fondamentaux que ceux des spécialistes des équations aux dérivées partielles. Les spécialistes de systèmes dynamiques sont très partagés entre les deux pôles. Certains des arithméticiens appliquent leurs connaissances au codage et au cryptage. Les statisticiens, traditionnellement très appliqués, sont en train de s'entourer de théoriciens très fondamentalistes, les logiciens sont maintenant très bien acceptés par les informaticiens théoriciens.

Ceci nous amène à constater que la répartition des mathématiciens du CNRS suivant deux commissions (qui semble inévitable dans un avenir proche) n'a plus guère de raison de se faire suivant une ligne de partage entre mathématiciens purs et appliqués- II est, dans le même temps, aussi nécessaire de laisser «diffuser» les mathématiciens profondément impliqués dans des collaborations pluridisciplinaires vers d'autres sections tout en trouvant un mode adapté d'évaluation de la partie proprement mathématique de leur travail.

Il est probablement nécessaire d'accompagner le mouvement d'ouverture sensible au niveau des mathématiques «avancées» par une modification de l'équilibre (voire du style) de l'enseignement des mathématiques visant à mettre en évidence ces nouvelles pistes- Une des difficultés qu'il faudra résoudre a trait au manque de documents de toutes natures (livres, films, séquences vidéo) pour les illustrer. Un plan de constitution d'un tel fonds, ainsi que les moyens nécessaires, devrait être mis sur pied. Il risque de se révéler un outil indispensable pour convaincre un nombre suffisant de jeunes de la génération montante d'apporter leur contribution au mouvement en cours. On peut regretter à ce propos la faiblesse de l'édition en français d'œuvres mathématiques de niveau universitaire ainsi que celle de la vulgarisation mathématique, qui ne pourront probablement être sauvées du presque néant dans lequel elles se trouvent que par la création d'un marché suffisant, par développement systématique des bibliothèques dans les établissement secondaires et par la mise en place de sections scientifiques dans les bibliothèques municipales. Ces moyens supplémentaires peuvent se révéler des aides précieuses dans la bataille qu'il va falloir mener pour convaincre suffisamment de jeunes de s'intéresser aux sciences. La présentation d'une activité scientifique moins compartimentée peut être de nature à la faire apparaître comme moins hermétique; aujourd'hui, cette activité est en effet trop souvent présentée comme hyperspécialisée et donc incommunicable-

Cette demande de moyens de communication et de documentation n'est pas une nouvelle priorité pour les mathématiciens qui se sont toujours battus (et quelquefois sacrifiés) pour disposer de bibliothèques de qualité et en nombre suffisant. Dans cette exigence, ils ont quelquefois rencontré une certaine incompréhension de collègues d'autres disciplines dont les besoins en documentation étaient plus volatils.

- Interaction des disciplines et interaction des chercheurs

Les disciplines scientifiques actuellement reconnues ne l'ont pas toujours été. Elles n'ont ni la même origine, ni la même date de naissance, ni les mêmes objectifs. Le développement de certaines, comme la biologie ou l'informatique, est si étroitement lié à l'apparition de nouveaux instruments qu'elles évoluent avec ceux-ci dans leurs ambitions.

Cela suffirait à démontrer que les frontières entre disciplines n'ont eu au cours de leur histoire aucune rigidité ni dans leur position, ni dans leur perméabilité. La situation telle qu'on peut la décrire à un moment donné n'est que le reflet d'une étape dans une histoire; elle ne permet pas de conclure à une hiérarchie définitive, ni même à un type de relations. La nature, l'ampleur, le sens de celles-ci peuvent être remis en cause à tout moment par une découverte majeure. On pourrait écrire l'histoire des interactions entre génétique et embryologie, comme on pourrait le faire depuis beaucoup plus longtemps entre la géométrie et l'analyse.

Il faut donc le souligner : malgré la parenté de méthodes dont se réclament les mathématiciens entre eux, ou les physiciens entre eux, certains biologistes connaissent mieux la statistique que certains géomètres, certains algébristes connaissent mieux la génétique que certains écologues, certains physiciens connaissent mieux la catalyse que certains minéralistes. Tout cela pour dire que *les interactions entre chercheurs sont souvent â découvrir au niveau des «petites» disciplines plutôt qu'à celui des «grandes»,* parce que c'est là que les champs se recoupent et que les objets de la recherche peuvent être communs.

2 - Des limites à supprimer

Mais ce mouvement d'ouverture trouve ses li mites dans la formation des chercheurs. Peu d'entre eux entrent dans la recherche avec une double formation, ou simplement une culture assez approfondie dans un deuxième domaine scientifique. On rejoint là bien évidemment un des points que nous avons abordé précédemment concernant l'enseignement. On peut regretter la faible culture des mathématiciens dans au moins une autre discipline scientifique, ainsi que le faible niveau mathématique de nombre de spécialistes des autres disciplines, car, rappelons-le encore, on modélise le plus souvent avec ce que l'on sait de mathématiques. Il faut arriver à développer les doubles compétences. A ce propos, la forme que revêtent actuellement la presque totalité des troisièmes cycles de mathématiques, le plus souvent encyclopédiques et sans objectif de formation précis, n'est pas la plus adaptée. *Des incitations à organiser, pour des durées moyennes, des cycles de formation adaptés à des interactions particulières pourraient être mises sur pied.*

Ce mouvement trouve aussi ses limites dans la difficulté institutionnelle qu'il y a à gérer des équipes pluridisciplinaires. Il trouve encore ses limites dans la difficulté qu'il y a à évaluer correctement l'apport d'un chercheur à une autre discipline et à reconnaître cet apport sur le plan de sa carrière. *// est primordial que la recherche en France cesse d'être organisée uniquement suivant une structure arborescente* et qu'existent aussi des structures transversales et croisées qui permettent la réussite de véritable programmes pluridisciplinaires. Un certain nombre de nouveaux terrains d'aventures sont à occuper, et vont nécessiter une coopération étroite et plus organique que celle que l'on rencontre traditionnellement dans les structures universitaires (un exemple de domaine probablement justiciable de cette approche est celui de la vision artificielle).

Vu la place importante que le CNRS occupe dans la recherche française, il peut et devrait avoir un rôle moteur pour favoriser ses interactions. *// ne faut pas que son faible effectif actuel en mathématiques, notamment en cadres A, se transforme en un handicap durable pour le rôle â jouer qui devrait être le sien dans le développement de ces interactions.*

Il est aujourd'hui indispensable de maintenir un recrutement important de mathématiciens au CNRS (notamment des jeunes) en couvrant un champ scientifique aussi large que possible. Il importe de ne pas céder aux modes qui, si elles provoquent la constitution de masses critiques permettant de faire de réelles percées, peuvent à terme représenter de réels obstacles dans le développement ultérieur d'une sous-discipline. Le principal goulot d'étranglement risque de venir du nombre trop faible de postulants pour ce type d'emplois devant la concurrence d'une embauche industrielle directe, d'où l'*impérieuse nécessité d'une action dans les écoles en direction des nouvelles générations visant à mieux faire comprendre la nature et l'intérêt du travail à effectuer*. Il s'agit ici d'une part de faire disparaître une barrière psychologique, et d'autre part de participer au mouvement d'ouverture de l'école sur le monde extérieur, en ce qui nous concerne plus spécialement, en montrant quelle est la nature du travail de recherche-

On voit donc que, si les interactions des mathématiques avec l'ensemble des autres disciplines scientifiques sont aujourd'hui extrêmement nombreuses et riches, des obstacles divers (dont certains difficiles à contourner) risquent d'entraver leur développement dans les années qui viennent. Vu l'extrême importance de ces interactions dans l'activité scientifique de notre pays, il est dès lors indispensable de s'attaquer à ces blocages, et à cet effet de promouvoir une politique résolument ambitieuse prenant en compte cette dimension vitale au développement scientifique.

CONCLUSION

On constate donc que, pour répondre aux besoins industriels et aux demandes des autres disciplines, les mathématiciens sont sortis de leur isolement. De nombreux exemples actuels prouvent que la résolution de problèmes externes aux mathématiques occupent à ce jour nombre d'entre eux, et qu'elle est un facteur de progrès autant pour les mathématiques que pour les disciplines qui les ont posés. Le développement des interactions des mathématiques avec l'ensemble des autres sciences s'impose donc, et il importe d'éliminer les freins existant à ces interactions. Trois actions prioritaires dans ce but concernent :

la **communauté des mathématiciens** qui doit mettre sur pied une méthodologie de jugement des travaux de leurs collègues engagés dans des travaux pluridisciplinaires;

l'enseignement supérieur qui, quantitativement, doit former davantage de mathématiciens et, qualitativement, doit imaginer des formations de chercheurs et d'ingénieurs à forte composante mathématique;

le **CNRS** qui, ayant par sa structure un rôle prépondérant à jouer dans le développement des interactions des mathématiques, doit donner aux mathématiciens les moyens en postes (chercheurs, techniciens et ingénieurs) et en matériel pour le mener à bien.

Claude Basdevant
Jean-Pierre Bourguignon
Rapporteurs du groupe 02