01

MATHÉMATIQUES ET OUTILS DE MODÉLISATION

FRANÇOIS LEDRAPPIER
Président de la section

ALAIN GRIGIS
Rapporteur

Roger-Dominique Bakry
Arnaud Beauville
Christine Bernardi
Claude-Michel Brauner
Nicolas Burq
Sonia Chakhoff
Pascal Chossat
Francis Choucroun
Marie-Françoise Coste-Roy
Patrick Dehornoy
Ginette Doclot
Jean-Michel Ghidaglia
Yves Laurent
France Lelong
Qing Liu
Patrick Polo
Marc Rosso
Robert Roussarie
Aviva Szpirglas

INTRODUCTION

La commission 01 a dans son champ de compétences l'ensemble des mathématiques. La communauté des mathématiciens est vaste et très diverse, mais aussi très unitaire car ses membres ont une démarche commune fondée sur l'élaboration de concepts à valeur universelle et sur l'exigence de démonstrations. Issues d'une longue tradition intellectuelle, les mathématiques construisent un langage et des outils que la plupart des autres disciplines scientifiques adoptent à plus ou moins long terme pour traiter leurs propres modèles.

La position des mathématiques françaises est excellente : l'école française est la seconde du monde, quel que soit le critère retenu : nombre de médailles Fields, invitations de conférenciers français aux derniers Congrès Internationaux des Mathématiciens, répartition de ceux-ci entre les divers domaines, etc.

Les mathématiques n'ont pas la réputation d'être un sujet très médiatique, même en France. Souvent elles sont absentes, ou leur image est déformée, ou même leur fonction en tant que science, dévoyée. Toutefois, deux événements récents ont franchi le rideau de l'indifférence. Le premier est, en 1994, la preuve de la conjecture de Fermat, par Andrew Wiles. Le second est, toujours en 1994, l'obtention par Jean-Christophe Yoccoz et

Pierre-Louis Lions de deux des quatre médailles Fields, la plus haute récompense mondiale décernée une fois tous les quatre ans aux mathématiciens. Ces événements exceptionnels ne sont que la partie émergée d'une immense activité très diversifiée. Cette activité s'appuie sur des structures et des institutions solides, dans lesquelles le CNRS joue un rôle primordial et reconnu bien au-delà de nos frontières.

Le monde mathématique est traversé par des idées qui, partant des théories les plus abstraites, aboutissent parfois aux applications industrielles. Il est remarquable de constater que l'inverse se produit aussi. Les interactions avec les autres disciplines, physique, informatique, chimie, biologie, économie, ... ne cessent de nourrir le développement des mathématiques. Les contacts directs avec l'industrie progressent et l'influence des mathématiques s'affirme en se diversifiant. Une des raisons en est la capacité des mathématiciens à simplifier, à clarifier et à dégager des concepts abordables.

Les mathématiciens eux-mêmes constituent la plus grande partie du capital investi dans la recherche. Le temps du chercheur isolé, rêvant à son théorème en mâchant son crayon, est révolu. Les mathématiciens travaillent maintenant en laboratoire, dans des équipes structurées en réseaux internationaux. Ils ont été parmi les premiers à s'investir dans les communications de type Internet. Les évolutions techniques, en particulier l'utilisation généralisée des ordinateurs, ont transformé la vie quotidienne de tous les scientifiques. La puissance de calcul des machines rend viables de nouvelles approches intellectuelles qui permettent aux mathématiques d'acquérir aussi une dimension expérimentale. Cela est vrai dans le domaine de la modélisation, en météorologie, en génétique ou en économétrie, pour ne citer que quelques exemples, où la classification de données complexes nécessite des multitudes d'expériences pour dégager de nouvelles lois. C'est aussi vrai dans la théorie mathématique elle-même, des conjectures se dégageant parfois des calculs dans certains domaines.

Ce rapport tente donc de donner un aperçu de la dynamique très complexe qui régit l'évolution des mathématiques actuelles. La commission 01 a réalisé dans ce but une enquête auprès de mathématiciens parmi les plus représentatifs. Elle tient à remercier tous ceux qui ont bien voulu participer à cette enquête. Leurs réponses ont inspiré plusieurs passages de ce texte.

Les développements qui vont suivre présentent de grandes écoles thématiques, analysent quelques thèmes transversaux et abordent des exemples d'interactions dans la théorie et la modélisation. Ils se poursuivent par des considérations sur la situation française et le contexte international, et par des vœux sur les moyens en hommes, en crédits et en équipements.

1 - PRÉSENTATION DE GRANDES ÉCOLES THÉMATIQUES ET DE CERTAINS COURANTS

Il s'agit de présenter ici quelques-unes des principales écoles classiques qui forment la base de l'édifice mathématique. Il est important d'observer leur évolution, car souvent ce sont des chercheurs formés par ces écoles, qui s'investissent dans de nouveaux sujets ou qui impulsent de nouvelles interactions.

1. 1 ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

L'algèbre et la théorie des nombres appartiennent aux domaines traditionnels des mathématiques. Elles ont, depuis un siècle, noué des relations fécondes avec d'autres branches comme la géométrie ou l'analyse. Ci-dessous sont mises en relief quelques-unes des facettes de ces théories.

La théorie des nombres a vu de très grands progrès dans les dernières années. Le plus spectaculaire est la résolution en 1994 du problème énoncé par Fermat au XVII^{e} siècle en des termes accessibles à tous. La solution découle de la preuve d'une conjecture récente de Taniyama-Shimura-Weil, portant sur des notions très compliquées à décrire, même à l'usage des mathématiciens d'autres spécialités. De nombreuses questions importantes restent ouvertes. La compréhension des points rationnels des variétés algébriques définies sur un corps de nombres est l'objet d'actives recherches qui s'organisent autour de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. D'une nature plus arithmétique, la conjecture d'Artin sur les fonctions L des corps de nombres résiste encore. On peut signaler aussi le problème inverse de Galois (on conjecture que tout groupe fini est le groupe de Galois d'un corps de nombres sur Q) qui est à la croisée de la théorie des nombres, de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes.

On note une forte interaction entre les méthodes, qu'elles soient arithmétiques, géométriques et plus récemment algorithmiques. La théorie des nombres est une discipline très bien représentée en France. L'école française est de premier niveau sur le plan international.

Passons maintenant à certains domaines de l'algèbre.

Actuellement les questions les plus vivantes et les plus stimulantes de la théorie des groupes finis et algébriques sont celles touchant à la théorie des représentations. Un certain nombre de conjectures, énoncées dans les dix dernières années, prédisent des liens profonds entre combinatoire, groupes, tresses, géométrie algébrique, topologie, et sont corroborées par de nombreux résultats numériques.

Plusieurs problèmes portant sur les actions de groupes algébriques réductifs restent ouverts, par exemple la description des actions sur un espace affine (avec des applications à des questions naturelles en géométrie algébrique) ou celle des propriétés globales des quotients d'ouverts de variétés algébriques projectives construits par la théorie des invariants.

Des questions classiques comme le calcul des multiplicités dans les produits tensoriels de représentations ont été éclairées d'un jour nouveau avec l'introduction des bases cristallines et les travaux sur le modèle des chemins ; ainsi ont été obtenues de nouvelles formules purement combinatoires qui expriment les multiplicités comme sommes d'entiers positifs. Des progrès sur la décomposition des puissances symétriques ont aussi été accomplis récemment, mais cette question reste encore largement ouverte.

La détermination des caractères irréductibles des groupes réductifs en caractéristique positive, objet d'une conjecture de Lusztig, a été obtenue récemment grâce à des ponts construits avec les groupes quantiques en une racine de l'unité et les algèbres de Kac-Moody ; il est remarquable qu'un de ces ponts ait été établi à partir d'idées de physique théorique.

Des objets de la géométrie convexe, polytopes, fonctions de partition, apparaissent naturellement dans des problèmes issus de la théorie des groupes réductifs ; ces objets jouent aussi un rôle dans des questions d'actualité en géométrie symplectique.

1. 2 GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE ALGÉBRIQUES

La géométrie s'est développée en plusieurs branches (différentielle algébrique, intégrale, etc.) qui ont chacune leur problématique et leurs techniques. Certaines sont présentées dans ce chapitre, d'autres dans le chapitre "Interactions" (et ce choix est un peu arbitraire). D'autres aspects auraient mérité d'avoir une place, en particulier les nouvelles géométries "arithmétiques" (p-adiques) où l'école française est de niveau exceptionnel. La topologie a, elle aussi, éclaté en plusieurs centres d'intérêt dont certains, moins algébriques, sont évoqués plus loin.

La géométrie algébrique complexe a été très bousculée récemment par le dialogue avec la physique mathématique, en particulier la théorie des champs : citons par exemple la découverte de la symétrie miroir, qui est un phénomène de dualité entre des familles de variétés projectives d'un type particulier, dit de Calabi-Yau. Des conjectures décrivent des relations très précises entre une variété et son "miroir", permettant notamment l'énumération des courbes rationnelles sur la variété. Citons aussi les “fonctions thêta non abéliennes” sur l’espace des modules des fibrés principaux sur les courbes, les invariants de Donaldson et, plus récemment, de Seiberg-Witten (évoqués dans un contexte plus général dans le chapitre “Interactions avec la physique”) sur les surfaces algébriques, et bien d’autres. Beaucoup de ces théories ont maintenant un statut mathématique, mais pas toutes : l’intuition de la théorie des champs, qui est le moteur commun de toutes ces découvertes, échappe actuellement à la plupart des mathématiciens. Rendre cette théorie rigoureuse est probablement un objectif à long terme, mais il est peut-être possible de développer une intuition mathématique parallèle.

D’autres domaines plus classiques restent très attirants. La théorie de Mori cherche à décrire la structure fine des variétés algébriques. Elle est maintenant bien comprise en dimension inférieure ou égale à trois, beaucoup moins en dimension plus grande. Les méthodes utilisées sont très algébriques ; le cas des variétés complexes non algébriques est très mal compris.

Citons aussi la cohomologie de l’espace des modules des courbes, le problème de caractériser les jacobiennes de courbes parmi les variétés abéliennes (problème de Schottky), la recherche de critères simples pour décider si une famille d’hypersurfaces sur une variété peut être découpée par des hyperplans dans un plongement convenable (conjecture de Fujita), la théorie des cycles algébriques (quel type de sous-variétés contient une variété donnée ?), etc.

La géométrie algébrique réelle étudie les systèmes d’égalités et d’inégalités polynomiales dans le domaine réel. Son émergence en tant que sous-discipline remonte à une quinzaine d’années ; elle attire à la fois des topologues, des algébristes, des géomètres, des théoriciens des modèles, tout en étant à la source de nombreuses applications. Les questions essentielles s’articulent autour de grands problèmes historiques : topologie des ensembles algébriques réels (16^{e} problème de Hilbert), algèbre réelle et sommes de carrés (17^{e} problème de Hilbert), rapport entre fonctions analytiques et fonctions algébriques, ensembles semi-algébriques et généralisations, effectivité et algorithmique dans la continuation du théorème de Sturm.

Les théories de modélisation des espaces topologiques par des objets algébriques se sont fortement développées récemment. Après la connaissance approfondie des modèles rationnels à la suite de Quillen et de Sullivan, plusieurs théories rendant compte de la partie de torsion ont vu le jour. Des modèles algébriques simpliciaux plus fins permettent de prendre en compte les opérations de Steenrod.

La théorie de l’homotopie est essentiellement née avec l’introduction par Poincaré du groupe fondamental d’un espace. Son problème central est la classification, à déformation continue près, des applications continues entre espaces. Cela est motivé par des questions diverses, entre autres la classification à déformation près des espaces, en particulier de petite dimension et la théorie des variétés *via* la construction de Thom-Pontryagin. Il y a eu durant les quinze dernières années des avancées considérables dans le domaine de l’homotopie équivariante, c’est-à-dire en présence d’actions de groupes. Cela débouche naturellement sur l’étude des actions de groupes sur les variétés. Des conjectures majeures ont été résolues. Par ailleurs, la théorie de l’homotopie entretient des liens étroits avec la K-théorie algébrique et l’algèbre homologique. Un développement spectaculaire en cours est l’introduction des techniques d’homotopie stable dans un domaine central de la géométrie algébrique moderne, la théorie des schémas.

La théorie de l’homotopie a déjà connu plusieurs révolutions et offre toujours de vastes champs à explorer. L’école française, avec Serre et Thom, en a initié une très large part ; elle est actuellement très bien placée sur la scène internationale, mais numériquement faible.

1. 3 ANALYSE ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

L’analyse est quelquefois présentée comme l’étude des inégalités et des espaces de fonctions. Ce travail en profondeur et de longue haleine a permis des progrès très remarquables dans la résolution des équations aux dérivées partielles. C’est l’aboutissement de ce succès qui sert de fil directeur à la présentation qui suit.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires et non-linéaires constituent un vaste ensemble très actif qui s'est développé considérablement dans la période récente. Par nature, ce domaine présente de multiples interactions avec plusieurs autres champs des mathématiques et il est très utilisé dans la modélisation de phénomènes relevant d'autres disciplines comme la physique, la chimie, la biologie, l'économie, l'imagerie, etc. Les bases théoriques sont continuellement enrichies par l'apport de techniques venant de l'analyse, de la géométrie, voire de l'algèbre. Des connexions nouvelles se développent de ce point de vue aussi avec la géométrie différentielle, les systèmes dynamiques et les probabilités. D'autre part, les domaines d'applications ne cessent de s'élargir, allant des problèmes de la chimie, comme ceux de la combustion ou de la cinétique des réactions, à certains aspects de la gestion financière.

La période récente a vu une grande diffusion de plusieurs théories issues de l'étude des EDP. Celle des D-modules, qui dégage les concepts algébriques profonds régissant les EDP linéaires, offre des développements importants dans plusieurs domaines : théorie des représentations de groupes, géométrie des singularités, analyse complexe, géométrie algébrique. L'analyse microlocale qui peut être vue comme une analyse de Fourier très généralisée, faisant intervenir des concepts de la géométrie symplectique, a permis d'obtenir plusieurs résultats importants en théorie spectrale, en mécanique des fluides et en théorie du contrôle. La théorie des fonctionnelles et des applications harmoniques est aussi l'objet d'intenses recherches, et des idées venues de la géométrie et de la topologie permettent des avancées spectaculaires.

De grands progrès dans la compréhension des EDP sont venus d'autres domaines de l'analyse. Par exemple, les problèmes géométriques qui apparaissent en analyse complexe sont par nature intimement liés à des phénomènes de propagation des singularités. Outre la théorie des ondelettes, l'analyse harmonique fine fournit des instruments indispensables à l'étude des EDP. L'analyse harmonique non-commutative est étroitement reliée à l'étude des groupes de Lie ; en introduisant de nouveaux types d'opérateurs sur des espaces de fonctions, elle ouvre de nouvelles perspectives. L'analyse fonctionnelle classique est toujours une source de problèmes difficiles, en particulier la classification des espaces de Banach, avec des ouvertures vers les algèbres d'opérateurs, les probabilités, la mécanique statistique et la statistique.

Plusieurs champs d'applications s'ouvrent. La mécanique statistique en est un exemple : des problèmes à grand nombre de variables peuvent s'étudier avec des intégrales du type de Feynman et des techniques venant des EDP. Un autre exemple est fourni par la physique du solide où les problèmes des milieux composites ou des interfaces singulières font intervenir de nouvelles extensions des EDP linéaires. D'autre part, plusieurs types d'EDP non-linéaires, celles intervenant dans les problèmes de propagation-diffusion, celles concernant les lois de conservation ou celles de type transport, par exemple l'équation de Boltzmann, méritent la poursuite de grands efforts de développement. Les problèmes de la turbulence ou ceux liés aux interactions entre fluides et structures constituent d'autres exemples. Cette liste est loin d'être exhaustive et il est probable aussi que les travaux de modélisation en cours dans les domaines variés décrits plus loin vont faire apparaître de nouvelles problématiques et de nouvelles théories.

De fameux problèmes ouverts comme, en mécanique des fluides, la régularité globale pour l'équation de Navier-Stokes, ou, en théorie spectrale, la localisation des résonances, motivent et guident aussi les travaux de plusieurs écoles.

La France a une tradition très forte dans le domaine des EDP, et plusieurs séminaires célèbres servent de référence en constituant un fonds technique mondialement utilisé. La tendance du milieu est plutôt à la diversification, et rares sont les champs d'études qui ne sont pas abordés par un laboratoire français. Une limitation pourrait apparaître si on ne prenait garde à maintenir un potentiel suffisant en chercheurs et un développement adéquat des moyens de calcul.

En conclusion, le domaine des EDP se caractérise par une grande ouverture et un grand dynamisme. Depuis longtemps, et particulièrement en France, il est très bien structuré, ce qui permet un enrichissement et une diffusion du savoir-faire à la fois vers les autres parties des mathématiques et vers les applications.

1. 4 Probabilités et statistiques

Probabilités et statistiques sont les mathématiques du hasard. Ce point de vue a enrichi les mathématiques d'une intuition d'un autre type. Le cœur des probabilités est l'étude des objets mathématiques construits pour modéliser les comportements avec des données inconnues ou imprévisibles. Cette branche est très sophistiquée, et l'école française est prestigieuse en ce qui concerne l'analyse des objets classiques. Elle est aussi très présente sur certains champs nouveaux : superprocessus, probabilités quantiques, systèmes infinis de particules. On peut regretter que l'étude mathématique de sujets apparus récemment en physique statistique, tels que percolation ou étude des milieux aléatoires, soit encore trop peu développée en France.

En revanche, la présence d'une école probabiliste très forte a favorisé l'intervention des probabilités dans d'autres domaines des mathématiques comme les espaces de Banach, la théorie des groupes, l'analyse harmonique, la géométrie riemannienne, les systèmes dynamiques, avec des résultats de tout premier plan.

Par nature, les probabilités sont aussi une science appliquée. Soulignons la place des mathématiques financières au développement rapide ces dernières années, où des modèles très élaborés sont appliqués quotidiennement et où les questions posées sont à la fois techniques et fondamentales. Grâce aux compétences accumulées et à l'activité de quelques mathématiciens, c'est un sujet où la France est active et qui devient une source de débouchés pour les étudiants de mathématiques. Un autre domaine de probabilités appliquées en pleine évolution est le traitement d'images et l'algorithmique aléatoire, où plusieurs équipes de grande valeur se sont investies.

Il y a cependant beaucoup de parties des probabilités appliquées qui pourraient fructueusement être renforcées, compte tenu des enjeux économiques sous-jacents : réseaux de files d'attente, simulation, méthodes de Monte-Carlo.

La situation en statistiques est parallèle, quoique moins favorable. Les statisticiens partent du point de vue de l'utilisateur et utilisent des méthodes probabilistes. Ils cherchent à estimer les paramètres des modèles et à faire des prévisions à partir des observations. Là encore, la théorie est bien représentée en France. C'est un domaine en pleine évolution où les mathématiques prennent de plus en plus d'importance, comme les techniques d'ondelettes, les grandes déviations, la géométrie. Les statistiques sont une science appliquée et d'un usage constant dans l'économie, la médecine, l'industrie, et toutes les autres disciplines scientifiques. Malheureusement, les théoriciens sont assez peu présents sur ce terrain et, mis à part quelques groupes de statisticiens appliqués, il reste un gros travail à accomplir pour les rapprocher des utilisateurs.

En résumé, pour ce domaine, en France, la situation des théoriciens est saine et la production de grande valeur.

2 - ANALYSE DE QUELQUES THÈMES TRANSVERSAUX

Il s'agit de thèmes souvent nouveaux qui ont le caractère commun de motiver des chercheurs d'horizons différents. En général, ils se caractérisent aussi par un besoin de fonder les théories.

2. 1 Groupes quantiques

Il s'agit d'un domaine apparu il y a environ une dizaine d'années, qui a développé rapidement des interactions spectaculaires avec de nombreux autres domaines des mathématiques et de la physique théorique : on peut citer par exemple la topologie de basse dimension (invariants "quantiques" des entrelacs et des variétés de dimension 3), la théorie des représentations des groupes algébriques en caractéristique non nulle (conjectures de Lusztig), les bases cristallines et leurs applications combinatoires, les q-fonctions spéciales, les théories des champs conformes, les sous-facteurs, etc. Plusieurs points de vue complémentaires se sont développés à propos de la notion même de groupe quantique : quantifications d'algèbres enveloppantes ou d'algèbres de fonctions sur des groupes de Lie, déformations, C*-algèbres de Hopf, etc. Les questions motivant les recherches dans le sujet sont très variées, selon le point de vue adopté et les applications envisagées. C'est un domaine où il y a encore beaucoup à défricher, qu'il faut laisser se développer en recrutant des gens de valeur, et qui est maintenant bien représenté en France.

2. 2 Fonctions automorphes

L'étude des fonctions automorphes et de leurs liens avec l'arithmétique occupe une place très centrale. Selon certains qui reprennent un mot de Godement, c'est là le jardin des délices ou l'opium des mathématiciens.

Ce domaine est tiré en avant depuis trente ans par un ensemble imposant de conjectures formulé par le mathématicien canadien Robert Langlands. Ce programme propose une correspondance entre deux types d'objets de nature apparemment très différente : les représentations du groupe de Galois d'un corps, qui relèvent de la théorie des nombres, et les fonctions automorphes, qui relèvent de l'analyse. La réalisation de ce programme représente un travail immense qui met en jeu l'analyse sur les groupes (formule des traces), l'étude des représentations des groupes de Lie réels et p-adiques (correspondance de Howe), la géométrie algébrique avec l'étude de certaines variétés algébriques associées à des groupes (variétés de Shimura, variétés de Drinfeld). Ce dernier point a progressé récemment.

Signalons que se placent aussi dans ce domaine les résultats de Wiles et de Taylor sur les congruences entre formes modulaires et leur rapport avec les représentations du groupe de Galois, résultats qui jouent un rôle essentiel dans la démonstration du théorème de Fermat.

La correspondance de Langlands a un analogue géométrique, qui ne fait pas intervenir de théorie des nombres, pour lequel Beilinson et Drinfeld ont introduit il y a deux ans une approche nouvelle très prometteuse.

Ce domaine a d'excellents représentants en France et fait l'objet d'une grande activité internationale.

2. 3 Systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est l'étude qualitative des équations différentielles. Le père fondateur de la théorie est Henri Poincaré, mais la place éminente que la France occupe actuellement dans le domaine est due plus à un concours de circonstances qu'à l'existence d'une véritable école. La structure, ou plutôt l'absence de structures, des systèmes dynamiques dans notre pays reflète cette génération spontanée.

Le principal attrait du sujet est qu'il fait appel à des techniques de nombreux domaines et qu'il interagit avec beaucoup de branches différentes des mathématiques. Cet intérêt déborde d'ailleurs largement du cadre strict des mathématiques. La relation est forte avec les sciences où le temps est un paramètre essentiel, comme par exemple la mécanique (en particulier la mécanique céleste, qui fut à l'origine des travaux de Poincaré), l'hydrodynamique et les systèmes loin de l'équilibre (turbulence, structures spatio-temporelles), la dynamique des populations.

Les principaux axes de recherche sont d'abord les problèmes internes à la théorie : classifier les systèmes, dans le cadre mesurable, topologique, différentiable ou holomorphe, décrire les propriétés génériques, les bifurcations, les propriétés les plus probables, étudier les feuilletages suivant ces thèmes. On développe à la fois des méthodes locales (singularités, formes normales, etc.), des méthodes globales (théorie de l'homotopie, méthodes variationnelles, etc.) et des méthodes probabilistes et statistiques (notions d'entropies). Par ailleurs, des modèles de systèmes dynamiques ont été construits, dont l'étude est devenue un véritable enjeu, car elle permet de dégager des concepts théoriques. Citons par exemple le problème des trois corps, les billards, l'application “standard”, l'attracteur de Hénon, etc. Enfin les interactions avec d'autres champs, particulièrement la théorie des nombres, les groupes de Lie et la géométrie riemannienne, sont aussi des sujets très étudiés.

La France est en pointe sur pratiquement tous les sujets du domaine, mais une faiblesse des systèmes dynamiques français est le manque de développement des interactions avec la physique mathématique et l'industrie. En URSS, cela se faisait naturellement par des structures communes et des institutions où coopéraient mathématiciens et physiciens. Certains projets français vont dans ce sens, mais il reste beaucoup à faire.

2. 4 Analyse numérique

Les plus grandes avancées réalisées ces dernières années en analyse numérique s'inscrivent sans doute dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Elles ont permis une compréhension correcte non seulement d'équations modèles théoriques, mais aussi des problèmes de base de la mécanique, se traduisant par la construction d'algorithmes bien appropriés à leur discrétisation. Toutes les grandes méthodes de discrétisation ont été analysées en France dès leur apparition : méthodes de différences finies, en particulier pour les schémas en temps, méthodes d'éléments finis, méthodes spectrales et d'éléments spectraux, méthodes particulaires, de volumes finis, d'ondelettes, techniques de décomposition de domaines et de synthèse modale en vue du calcul parallèle. La réécriture des algorithmes en vue de leur traitement par des machines parallèles est un enjeu majeur qui conditionne l'accomplissement de gros calculs, dont l'industrie a aussi besoin. Citons, parmi les résultats encore incomplets – bien que faisant l'objet d'une énorme quantité de travail –, les systèmes hyperboliques non linéaires pour lesquels les difficultés théoriques et numériques sont considérables, et les méthodes asymptotiques sur lesquelles travaillent beaucoup de chercheurs. D'autres recherches concernent les problèmes numériques actuels en algèbre linéaire, l'approximation par des fonctions splines ou des fractions rationnelles, le traitement du signal. Les contributions françaises à ces questions se caractérisent le plus souvent par leur grande rigueur mathématique.

De nombreux problèmes trop coûteux à résoudre par des méthodes déterministes sont maintenant traités de façon satisfaisante au moyen d'algorithmes aléatoires : le recuit simulé, les algorithmes génétiques, les algorithmes d'apprentissage. Quoique largement utilisées, ces méthodes demandent encore à être étudiées sur le plan théorique.

2. 5 Histoire des mathématiques

L'histoire des mathématiques a certainement un caractère transversal, car elle touche les mathématiciens de toute obédience. Elle est pratiquée en France par une centaine de personnes et dans le monde par environ un millier. Le sujet est en pleine expansion au niveau de la recherche avec l'apparition de nouvelles collections de livres, de nouvelles revues, de nombreuses conférences et associations savantes, et avec la création de plusieurs instituts, en particulier un institut Max Planck à Berlin.

Les recherches sur les mathématiques non occidentales, soit pré-grecques, soit dans des traditions largement indépendantes comme l'Asie, ont connu un important développement. Des découvertes archéologiques et philologiques importantes ont permis par exemple de comprendre en détail la naissance du nombre écrit abstrait. De grands projets éditoriaux, faisant intervenir les nouvelles technologies, concernent les œuvres de mathématiciens et physiciens comme Leibnitz, d'Alembert, Condorcet, Poincaré, Jacobi, Weyl, Einstein. L'histoire des mathématiques aborde aussi des questions essentielles comme les rapports entre mathématiciens et société.

La France occupe une bonne place dans les résultats obtenus, en particulier grâce à des travaux sur l'Asie et ses relations avec les mathématiques européennes, les mathématiques en Méditerranée, l'histoire des statistiques, les mathématiques dans les écoles d'ingénieurs, etc. Le CNRS joue un rôle important dans ce domaine.

3 - EXEMPLES D'INTERACTIONS EXTERNES

3. 1 Logique et informatique

Sous l'influence de l'informatique, on a assisté, depuis une quinzaine d'années, à un renouveau des méthodes et des problèmes de la logique. Ainsi, les questions de sécurité logicielle qui demandent des preuves de spécifications ont-elles amené le développement théorique et pratique sous la forme de prototypes semi-industriels, de langages de type fonctionnel comme les lambda-calculs typés, basés sur la logique intuitionniste.

Le regain d'intérêt pour cette logique a induit de nouveaux développements théoriques, tels la logique linéaire, apparue en 1986, et qui ne manipule plus des vérités éternelles mais des réalités contingentes, où la notion de coût est essentielle. Cette théorie privilégie la notion d'interaction entre unités, d'où l'intérêt et les espoirs qu'elle suscite dans le monde de l'informatique, en particulier en direction de la programmation parallèle en manque de substrat théorique.

Bien représentée au CNRS, la logique n'est présente en France que dans très peu d'universités, alors que ses applications se font de plus en plus nombreuses.

3. 2 Algèbre, géométrie et informatique

Il s'agit d'étudier les grands problèmes de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes du point de vue de l'effectivité, de la complexité et de l'efficacité. C'est un retour à la tradition historique calculatoire de l'algèbre, qui a été oubliée pendant une bonne partie du vingtième siècle et revient en force avec l'essor de l'informatique comme outil pratique et discipline scientifique. L'informatique théorique permet de mieux analyser la nature profonde des algorithmes, tandis que l'informatique pratique permet de tester les méthodes sur des exemples et de se tourner vers les applications.

Le calcul formel est bien implanté en France et il est utilisé dans d'autres domaines, l'astronomie par exemple. Le soutien du CNRS, qui a permis la mise au point d'un centre de ressources efficace, joue un rôle important, et il doit être maintenu.

3. 3 Géométrie et physique

La géométrie différentielle a été dès son origine profondément liée à la physique et les allers-retours conceptuels sont nombreux et féconds. Les noms d'objets géométriques usuels le montrent bien : métriques d'Einstein, opérateurs de Dirac, spineurs, etc. Outre la symétrie miroir déjà évoquée dans un contexte algébrique, de nombreux progrès récents, centrés sur la géométrie, concernent en fait bien d'autres domaines. Les invariants de Seiberg et Witten, utilisant une équation de Dirac particulière, ont permis des avancées spectaculaires dans la compréhension de la topologie de dimension 4 et en topologie symplectique, amplifiant des résultats de la théorie de Donaldson qui, elle, s'appuyait sur les théories de jauge non abéliennes.

Parmi les sujets où les idées des physiciens ont permis de progresser, on peut citer aussi les méthodes variationnelles d'EDP en analyse globale, en particulier sur les relations entre courbure et topologie et la topologie symplectique, dont beaucoup de propriétés sont encore mystérieuses, la géométrie kählérienne et ses liens avec la théorie quantique des champs, la géométrie différentielle non-commutative et les interprétations physiques qu'en propose Alain Connes, l'usage des spineurs en géométrie et la supersymétrie, la géométrie sous-riemannienne et son usage en théorie du contrôle, les approches géométriques à la théorie des nombres, la géométrie à courbure négative et ses liens avec la théorie ergodique et le chaos quantique, etc.

Devant ce foisonnement un peu étourdissant, le fait que la France ait un grand nombre de mathématiciens de talent, travaillant à seulement quelques heures de train les uns des autres, est un atout considérable qui doit lui permettre de continuer d'être à la pointe de la recherche sur des points fondamentaux de la compréhension du monde physique.

3. 4 Modélisation

Les modèles mathématiques, discrets ou continus, déterministes ou stochastiques, prennent en compte des phénomènes non linéaires de plus en plus complexes, dans des géométries multi-dimensionnelles. Ils s'appliquent à de nouveaux domaines scientifiques (environnement, réseaux de neurones, etc.), à des problèmes industriels représentant des enjeux économiques, voire stratégiques. La puissance des ordinateurs actuels, notamment parallèles, permet non seulement la simulation numérique de phénomènes connus mais aussi de véritables “expérimentations numériques”, donnant en retour une évaluation des hiérarchies de modèles en confrontation à la situation expérimentale réelle. La validation est une phase cruciale, et demande au préalable une étude théorique incontournable des phénomènes critiques qui peuvent se produire dans les modèles. A la base, on trouve la théorie des bifurcations et celle des systèmes dynamiques. Toutefois, les problèmes posés par les physiciens, chimistes, biologistes... sont le plus souvent extrêmement complexes et nécessitent le recours à de nombreuses branches des mathématiques : équations aux dérivées partielles, méthodes asymptotiques et homogénéisation, singularités, méthodes géométriques, frontières libres, groupes de Lie et leurs représentations, probabilités, etc. La démarche du mathématicien modélisateur couvre ainsi tout le spectre, de l'analyse du système jusqu'au code de calcul.

Voici une liste, non limitative, des domaines où la modélisation est en plein essor :

Mécanique des fluides

Les équations de la mécanique des fluides sont depuis longtemps l'objet de simulations numériques : actuellement la création d'un nouvel avion repose majoritairement sur des expérimentations numériques “en taille réelle”. Bien qu'étudiées depuis longtemps, les instabilités hydrodynamiques, transition vers la turbulence et chaos, ou ondes de surface par exemple, sont encore largement incomprises. De grands efforts sont en cours concernant les fluides non newtoniens, le vaste domaine de la combustion, à l'interface entre l'hydrodynamique et la chimie, le couplage fluide-structure.

Nouveaux matériaux

La modélisation ne se limite plus aux plaques, elle s'applique actuellement aux nouveaux matériaux parmi lesquels ceux dits intelligents (à mémoire) et à l'optimisation de forme sous contraintes technologiques (Conception Assistée par Ordinateur).

Électromagnétisme

L'évolution récente de la technique de détection par les radars conduit à de nouveaux problèmes liés à la furtivité, soit par des méthodes actives de type antennes, soit par l'utilisation de nouveaux matériaux. Ces problèmes requièrent la modélisation et la simulation numérique précise des ondes électromagnétiques.

Interaction laser-matière

La construction de lasers de haute puissance laisse entrevoir la possibilité de l'étude mathématique d'un domaine de la physique inexploré jusqu'alors.

Environnement

Cette rubrique regroupe des thèmes en pleine évolution, en climatologie, météorologie, géologie, glaciologie, systèmes écologiques, etc. La mécanique des fluides géophysiques dans des milieux souvent aléatoires fait intervenir des échelles d'espaces et de temps considérables. Il est donc indispensable d'élaborer des modèles simplifiés globaux, par exemple pour les interactions océan-atmosphère ou la circulation de l'air en milieu urbain. Les techniques à cheval sur les probabilités et le calcul scientifique sont encore trop peu développées en France.

Mathématiques du vivant

Il s'agit là d'une branche des mathématiques appliquées, nouvelle en France, sur laquelle plusieurs groupes commencent à travailler. Citons, parmi les recherches en cours, les problèmes de propagation d'épidémies, le séquençage de génomes, les écoulements sanguins, la morphologie du cœur. Des collaborations entre biologistes, médecins et mathématiciens devraient être encouragées.

Réseaux de neurones

Les problèmes posés par les réseaux de neurones et la vision artificielle sont étudiés par des équipes au double profil mathématique et informatique, avec de multiples interactions.

3. 5 Mathématiques et économie

Parmi les nombreuses interventions des mathématiques en économie, l'exemple des mathématiques financières montre bien l'explosion des besoins. En effet, avec l'ouverture de marchés organisés en France à la suite des États-Unis et de la Grande-Bretagne, s'est développée une activité financière dont les enjeux sont considérables et qui rapproche la banque de l'assurance. Il y a dans ce domaine un grand besoin de modèles, d'ingénieurs mathématiciens capables de faire tourner des calculs en temps réel, de nombreuses questions de recherche et développement.

L'objet d'étude lui-même est abstrait, l'exemple le plus simple en est la couverture des produits dérivés. Il n'est pas étonnant que les modèles soient assez sophistiqués. Ils font intervenir, le plus souvent simultanément, les problèmes inverses en EDP, les équations différentielles stochastiques, les simulations statistiques, et renvoient à de nombreuses questions théoriques de ces domaines.

Les banques et les assurances devraient jouer leur rôle d'industriels en finançant une recherche appliquée de qualité qui pourrait utiliser la richesse du niveau de formation mathématique en France.

4 - LA SITUATION FRANÇAISE ET LE CONTEXTE INTERNATIONAL

La situation des mathématiques françaises est très bonne. Elle est excellente au niveau scientifique : en effet, rares sont les secteurs des mathématiques non représentés en France, et dans certains notre pays a une bonne avance. Cela est dû en partie à la place importante que les mathématiques occupent dans l'enseignement français. Au niveau matériel, la situation est aussi relativement bonne dans l'ensemble. L'existence du CNRS est un atout d'une importance incomparable pour le maintien au plus haut niveau de la recherche mathématique. Il est primordial de préserver ces deux atouts, le CNRS et la qualité de l'enseignement, et il convient de ne lâcher ni sur l'un, ni sur l'autre.

Il est également important de s'intéresser à la situation dans les autres pays et de défendre la science chez nos partenaires. Un événement majeur est l'effondrement survenu dans les pays de l'Est, et notamment en Russie. Cet énorme bassin de connaissances mathématiques et de savoir-faire s'est ouvert largement aux contacts et, en même temps, il a été déstabilisé par un arrêt brutal des moyens matériels mis à disposition. Il en a résulté un grand remue-ménage des idées et des hommes dans presque tous les champs des mathématiques. La France en a largement bénéficié grâce à d'excellentes initiatives comme les postes d'accueil CNRS ou les postes PAST. Une des conséquences de ces bouleversements est que, désormais, tous les mathématiciens travaillent dans le même monde. Il n'existe plus cet au-delà où des théories inconnues étaient en mouvement - on en a vu plusieurs émerger récemment -, et où certains travaux méprisés à tort pouvaient trouver un écho favorable : le défrichage du travail de De Branges par l'école de Leningrad en est un exemple.

Il semble qu'aux États-Unis la situation soit moins bonne, avec moins d'emplois, moins de moyens, et un fléchissement déjà perceptible dans certains domaines. Il est indéniable que le nombre de colloques importants y a diminué. Il faut espérer que cette période défavorable ne durera pas et que nos collègues américains retrouveront rapidement de meilleures conditions de recherche.

En Europe, on assiste à une coopération renforcée entre les pays. Il s'y déroule de plus en plus fréquemment des colloques importants, de sorte que les mathématiciens français rencontrent leurs collègues allemands, britanniques, suisses, italiens ou autres ailleurs que dans une université américaine. Les centres de rencontres européens (Oberwolfach, CIRM à Marseille-Luminy) se sont imposés comme des lieux privilégiés pour organiser des colloques mathématiques et sont donc très recherchés. Des instituts accueillant un grand nombre de visiteurs ont été créés dans la plupart des pays du monde. Ceux qui sont situés en Europe (Institut Max Planck à Bonn, Institut Isaac Newton à Cambridge, ICTP à Trieste, Institut Mittag-Leffler en Suède, Institut Henri Poincaré à Paris et Institut des Hautes Études Scientifiques à Bures-sur-Yvette, etc.) ont un grand rayonnement. L'augmentation des crédits européens pour la recherche joue aussi un rôle fondamental dans cette évolution. Cette situation très positive n'exclut pas quelques dysfonctionnements au niveau des programmes de la Commission Européenne et des erreurs de répartition, auxquels il est urgent de remédier en instaurant des structures d'administration de la recherche mieux adaptées aux besoins de chaque discipline.

Dans les pays en développement, la situation n'a guère évolué. Parfois, elle s'est même aggravée, par exemple en Algérie. Il faut pouvoir accueillir des étudiants et des chercheurs de ces pays dans de bonnes conditions. Mais il faut aussi préserver les structures de formation qui y existent et multiplier les initiatives de coopération, telles celles mises en œuvre par le CIMPA. Dans le sud-est asiatique, certains pays atteignent un niveau de développement économique élevé, et l'émergence d'universités fortes est à prévoir. Il est important que les mathématiques y prennent leur place, et les mathématiciens français doivent s'y employer.

5 - VŒUX SUR LES MOYENS EN HOMMES, EN CRÉDITS ET EN ÉQUIPEMENTS

Les mathématiques, comme toute science, ont un coût, et les considérations socio-économiques ont leur importance. Les désastres qui frappent la recherche dans certains pays appellent à la vigilance. Le CNRS a un rôle primordial à jouer ; on trouvera ci-dessous quelques recommandations.

5. 1 Renouvellement du potentiel humain au CNRS

La recherche mathématique en France est très majoritairement universitaire, mais le CNRS, avec seulement un dixième des mathématiciens, occupe une place de premier plan et aide à maintenir l'excellence. Il existe un flux sortant vers l'université, cinq à dix chargés de recherche devenant professeurs chaque année. Le nombre de recrutements doit compenser ces sorties, renouveler les générations et commencer à lisser le choc prévisible des départs massifs à la retraite d'enseignants-chercheurs dans la période 2000-2010. Le fléchage volontariste "deux tiers en province, un tiers à Paris" pour les affectations des entrants a permis une consolidation très positive des équipes de province. Toutefois, il conduit au vieillissement des équipes parisiennes. Un fléchage plus précis des lieux d'affectation ou des thèmes de recherche n'est pas très adapté aux mathématiques dans la mesure où le CNRS recrute des chercheurs *a priori* capables de s'adapter et d'être mobiles.

L'âge moyen de promotion ou d'accès au grade de directeur de recherche a tendance à augmenter, ce qui est logique vu le nombre d'entrants qui est très largement supérieur au nombre de promus. Les universitaires, qui aimeraient profiter de détachements au CNRS pour avoir plus de temps à consacrer à la recherche, tout comme les chargés de recherche, qui ont un grand retard de carrière par rapport à leurs collègues enseignants-chercheurs, vivent difficilement cette situation qui n'est pas saine à long terme. En mathématiques, la recherche se développe par une symbiose entre le CNRS et l'Université. C'est une très bonne chose, et il faudrait lever certains obstacles administratifs pour favoriser encore plus les échanges entre ces institutions.

5. 2 Le financement de la recherche mathématique

Le financement de la recherche mathématique est globalement jugé acceptable, mais le mode de répartition des crédits est souvent critiqué. De façon un peu surprenante, les laboratoires les mieux dotés se plaignent souvent des contraintes administratives et du nombre de dossiers à remplir. D'autre part, il est clair que la vie est dure dans certains endroits défavorisés, et il est inacceptable de voir des chercheurs de réputation indiscutable renoncer à des missions ou à des invitations pour ne pas priver les jeunes de leurs contacts indispensables. Il est normal que les instances d'évaluation du CNRS et du Ministère travaillent à corriger des disparités injustifiées.

Enfin, de nombreux collègues se plaignent des à-coups dans les attributions de crédits et de la remise en cause permanente de ce qui leur revient. Il est souhaitable qu'une certaine continuité existe, ce qui, bien sûr, n'exclut pas les remises en cause à moyen terme. Il est important que toutes les promesses soient tenues : il est plus facile de détruire que de construire et les groupes de recherche efficaces sont parfois fragiles.

Les contrats de recherche sont de plus en plus importants en mathématiques mais il ne faudrait pas que la recherche de contrats prenne le pas sur la recherche scientifique. Il est sans doute possible d'améliorer le fonctionnement de ce mode de financement : il est important que les contrats aient des retombées sur tous les laboratoires qui y prennent part et que les procédures d'évaluation finale soient menées de manière rigoureuse. Il serait souhaitable de faire participer davantage les mathématiciens purs : il est en effet normal que le savoir théorique soit aussi rémunéré.

5. 3 De grands équipements en mathématiques ?

Jusqu'à ces dernières années, les seuls grands équipements en mathématiques étaient les centres de rencontres et les bibliothèques. Bien sûr, celles-ci ont encore une importance fondamentale, mais des évolutions sont en cours. Leur informatisation a besoin d'être généralisée, ainsi que le développement de bases de données. La transmission informatique de documents se développe de plus en plus. On voit apparaître des revues électroniques consultables par ordinateur. Certains mathématiciens se contentent désormais de mettre leurs prépublications sur leur "page-maison" dans Internet et de diffuser une note brève par courrier électronique à leurs correspondants du monde entier.

Le développement de réseaux de communication efficaces est donc ressenti comme une nécessité de plus en plus cruciale. Ce problème ne date pas d'hier, mais comment ces réseaux seront-ils financés ?

D'autres besoins d'un type nouveau sont aussi apparus. L'accroissement de la complexité des problèmes étudiés nécessite le développement d'ordinateurs très puissants. En particulier, les machines parallèles et les stations de travail en grappe promettent pour l'avenir un énorme essor du potentiel de calcul, pour peu que les algorithmes nécessaires à leur utilisation soient disponibles. Il faut encourager le développement de gros moyens de calcul internes aux laboratoires des Universités et du CNRS, pour qu'un chercheur désirant justifier ses résultats théoriques ou d'analyse numérique n'ait plus à faire appel à des "calculateurs" dans le privé ou à l'étranger. D'autre part, il faut absolument veiller à la formation de chercheurs capables d'écrire ou de superviser l'écriture de grands programmes de calcul, notamment sur les machines parallèles ; ces logiciels doivent pouvoir être écrits en langages modernes et compatibles avec plusieurs types de machines. Néanmoins, le besoin le plus criant à l'heure actuelle est celui d'ingénieurs informaticiens, indispensables pour la maintenance des réseaux déjà installés dans les laboratoires.

Les mathématiciens sont donc maintenant demandeurs de grands équipements. Des efforts importants ont été faits dans la période récente, mais il est nécessaire de ne pas couper l'élan donné pour que les mathématiques françaises puissent rester dans le peloton de tête.

CONCLUSION

LES INTERACTIONS

On peut constater dans la période récente une nette augmentation des interactions, à la fois entre les différentes branches des mathématiques, mais aussi entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques. De nombreux résultats exigent des connaissances profondes dans plusieurs domaines fondamentaux. Le cloisonnement entre mathématiciens purs et mathématiciens appliqués est de plus en plus flou, et il est clair que de nombreuses coopérations se mettent en place. D'un autre côté, les mathématiciens ont de plus en plus d'échanges et de collaborations avec leurs collègues des autres disciplines. C'est le cas pour la physique, mais aussi pour l'informatique, la biologie et la chimie. Enfin, les liens avec l'économie sont aussi en progression. Il est significatif de voir que le congrès international de physique mathématique qui s'est tenu à Paris en 1994 impliquait un groupe exceptionnel de mathématiciens.

Le CNRS est certainement un lieu privilégié pour la mise en place de structures adaptées à des équipes interactives. Cependant, l'évaluation n'est pas toujours facile dans le cas d'actions pluridisciplinaires, et la rigueur de gestion indispensable doit pouvoir être imposée dans un cadre adéquat.

L'AVENIR DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques françaises se portent très bien. Elles continuent de jouer un rôle important. Elles en sont redevables pour une bonne part au CNRS. Toutefois, il convient de comprendre les contingences et les raisons de cette situation et de ne pas se contenter des succès récemment obtenus sur la scène internationale. Les mathématiciens ont fait preuve, depuis quelques années, d'une grande ouverture, bénéfique à bien des égards. Les applications apportent beaucoup, et pas seulement au niveau financier. Mais un équilibre doit être maintenu, et il faut consolider au niveau théorique les avancées venues des applications. Il est remarquable que ce soit la collaboration ouverte entre des mathématiciens théoriciens très curieux et des modélisateurs soucieux de rigueur qui ait permis une avancée significative dans plusieurs domaines, comme la théorie des ondelettes. Cela nous montre avec force qu'il est essentiel de préserver l'unité des mathématiques. Les mathématiques françaises ne doivent pas perdre leur identité en se morcelant, elles doivent garder une structure cohérente.

Parions que la vitalité des mathématiques permettra de surmonter les difficultés, comme le laisse à penser la phrase suivante d'Edward Witten :

"I do think that, looking at things in the long run, some of the most exciting mysteries we know about in trying to expand our knowledge of fundamental nature law are mathematical".