

01

MATHÉMATIQUES ET INTERACTIONS DES MATHÉMATIQUES

Président de la section

Fabrice PLANCHON

Membres de la section

Yves ANDRÉ

Yannick BARAUD

Vincent BEFFARA

Yannick BOURLÈS

Dominique CELLIER

Thierry COLIN

Francis COMETS

Maria ESTEBAN

Pierre-Olivier FLAVIGNY

Anne-Laure FOUGÈRES

Vincent FRANJOU

Étienne GHYS

Gérard LAUMON

Frédérique LAURENT

Rosita MONCHANIN

Francis NIER

Claude SABBAH

Christoph SORGER

Alain TROUVÉ

Jean-Yves WELSCHINGER

INTRODUCTION

L'interaction des différents domaines des mathématiques entre eux ou avec d'autres domaines de recherche est et reste un des moteurs du développement des mathématiques. L'essor des nouvelles technologies, conjugué à l'explosion des moyens de calcul, a donné un attrait renouvelé aux mathématiques et aux outils qui en sont issus. Les transferts de compétences, parfois inattendus, se sont multipliés : entre domaines de plus en plus variés des mathématiques, où cette tendance s'amplifie ; avec d'autres sciences, où les liens traditionnels sont renouvelés et de nouveaux liens sont créés ; enfin, avec divers champs technologiques, où ce phénomène prend une ampleur considérable. Ces changements ont motivé le développement du calcul scientifique et la conception d'algorithmes par les mathématiciens eux-mêmes. Ils ont également donné une plus grande place à l'expérience et à la simulation.

Il faut néanmoins se garder de considérer les mathématiques comme une discipline de service, même si cette activité est souvent la plus visible à l'extérieur de la communauté mathématique. Des enjeux importants sont dégagés par la communauté elle-même, soit par le développement propre des thématiques et problèmes, soit par la demande extérieure

aux mathématiques proprement dites. Il faut également souligner que le développement des mathématiques n'est pas fondé sur la réalisation de fins assignées à l'avance, mais avant tout sur l'irruption, par nature imprévisible, d'idées nouvelles, souvent aux carrefours des domaines thématiques. Des communautés entières de mathématiciens travaillent sur de grands programmes; il est important de les soutenir en France, mais il convient avant tout de veiller au respect de l'intégrité du spectre mathématique, c'est-à-dire de ne laisser se creuser aucune lacune. La France peut se prévaloir d'une excellente activité de recherche dans la quasi-totalité des grands domaines, sa préservation est une condition essentielle de la vitalité et du rayonnement de son école. Il faut enfin insister sur le fait que des domaines importants des mathématiques (combinatoire, géométrie algébrique, par exemple) deviennent un champ d'application de théories physiques telles que la théorie quantique des champs ou la théorie des cordes; en parallèle, des domaines plus traditionnellement liés aux applications (probabilités, équations aux dérivées partielles) étendent leurs interactions et effectuent des percées remarquables (physique statistique et théorie de la percolation pour ne citer qu'un exemple).

1 – LE POSITIONNEMENT DES MATHÉMATIQUES FRANÇAISES ET LE CNRS

Il convient tout d'abord de rappeler la vitalité et l'excellence des mathématiques françaises. Il suffit pour s'en persuader de regarder la liste des invités au récent congrès international de mathématiques qui se déroulait à Madrid en août 2006, un événement qui a lieu tous les quatre ans et qui voit la remise des médailles Fields. On compte en effet 30 français (et un étranger en poste en France depuis longtemps), dont 10 chercheurs CNRS (2 étant actuellement en détachement aux États-Unis),

pour un total de 192 invités. Parmi les 20 conférenciers pléniers, 3 sont français, dans des domaines distincts (cohomologie, géométrie algébrique complexe, systèmes dynamiques), et sur les 20 sections disciplinaires, 13 comptent au moins un conférencier français: algèbre (2), théorie des nombres (3), géométrie algébrique et complexe (1), topologie (1, en poste à l'étranger), groupes et algèbres de Lie (2), algèbre d'opérateurs et analyse fonctionnelle (1), systèmes dynamiques (2), équations aux dérivées partielles (3), physique mathématique (4), probabilités et statistiques (5), combinatoire (1), analyse numérique et calcul scientifique (1), applications des mathématiques (2). À titre de comparaison, on relève 88 invités affiliés à des institutions américaines, mais dont une part non négligeable (plus d'un quart) vient de l'étranger. Enfin, un probabiliste français, Wendelin Werner (qui fut chargé de recherche CNRS avant de devenir professeur à Paris-sud) a reçu la médaille Fields pour ses contributions au développement de l'évolution stochastique de Loewner, la géométrie du mouvement brownien deux-dimensionnel et la théorie conforme des champs. Ses travaux ont permis de donner un cadre rigoureux à plusieurs conjectures en physique statistique sur les états critiques. Dans le même ordre d'idée, le premier prix Abel (créé à l'image des prix Nobel) a été remis en 2003 à un mathématicien français, Jean-Pierre Serre, pour son rôle clé dans le développement moderne de nombreuses parties des mathématiques, incluant la topologie, la géométrie et la théorie des nombres.

La communauté mathématique française est essentiellement universitaire (environ 3 000 enseignants-chercheurs pour 350 chercheurs CNRS) mais de nombreux autres organismes (INRIA, INRA, CEA, etc.) accueillent des mathématiciens, souvent aux interfaces mais pas nécessairement. Malgré l'absence de laboratoires propres (environ soixante UMR, qui quadrillent remarquablement le paysage universitaire français), et les faibles moyens humains et financiers engagés, le CNRS joue actuellement un rôle très important de structuration du tissu mathématique français. Possédant une vision globale à l'échelle nationale, il

participe au suivi et à l'évaluation des laboratoires mixtes, dans un souci permanent de concertation avec les universités. La mobilité de et vers l'enseignement supérieur, souvent citée, est exemplaire. Les GDR, utiles pour fédérer des communautés autour d'une thématique et favoriser les actions en direction des jeunes, sont un autre exemple à poursuivre et à amplifier. Les financements incitatifs, trop peu nombreux et souvent symboliques, jouent néanmoins un rôle qu'il convient au minimum de maintenir.

Soulignons aussi qu'il y a trop peu de laboratoires du CNRS relevant de la section 01 associés à des écoles d'ingénieurs, ou avec d'autres EPST. Cela est sans doute en partie dû à l'influence trop limitée de la section 01 dans le domaine de la modélisation et du calcul scientifique. Les recrutements dans ces domaines restent relativement faibles (il est vrai que la concurrence des autres EPST (CEA, INRIA), comme d'autres sections du CNRS, est importante). Les mathématiciens ont pourtant un rôle moteur à jouer, au vu des enjeux scientifiques et techniques.

2 – MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

De grands problèmes ouverts sont souvent les moteurs essentiels du développement scientifique. Ils sont parfois reliés, de près ou de loin, à des questions posées dans d'autres sciences, et leur solution peut donner lieu à des applications inattendues (ce qui est illustré par des exemples récents en théorie des nombres et cryptologie). Citons quelques uns de ces problèmes, choisis en particulier pour leur caractère pluri-thématique. De nombreux autres exemples figurent dans les sections qui suivent.

2.1 LA CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3

C'est l'aboutissement d'un siècle de topologie géométrique qui semble à portée, et l'un des événements le plus spectaculaire des deux dernières années, en mathématiques : l'annonce d'une démonstration, par G. Perelman, de la conjecture de géométrisation de W. Thurston (dont un corollaire immédiat est la conjecture, centenaire, de Poincaré sur les variétés fermées simplement connexes de dimension 3 : elles sont homéomorphes à la sphère). Alors que les détails sont en cours de vérification dans les cercles d'experts (notamment dans plusieurs laboratoires français), l'impact de ces idées ne fait déjà aucun doute, par les développements qu'elles engendrent déjà en analyse géométrique. Renouvelant un programme lancé par R. Hamilton sur l'étude du flot de Ricci, elles reposent sur des méthodes variationnelles (liées aux équations aux dérivées partielles issues de la géométrie riemannienne), et sont pour le moment totalement disjointes des grands courants précédents en topologie de dimension 3 (homologie de Floer, invariants quantiques). Étant donné l'importance et les retombées de ces courants ces quinze dernières années, il n'est même pas la peine d'insister sur le caractère extrêmement prometteur d'une assimilation des méthodes de Hamilton-Perelman en vue d'une synthèse avec ces courants.

2.2 LE PROGRAMME DE LANGLANDS

Il tente de mettre à jour des connexions mystérieuses entre la théorie des nombres et la théorie des représentations de groupes (dont un cas particulier implique le grand théorème de Fermat) ; ses aspects géométriques sont aussi centraux en géométrie algébrique ; cette « dualité » a récemment été éclairée par d'autres dualités provenant de la théorie quantique des

champs et la théorie de cordes en physique. Dans son discours de réception à l'Académie des Sciences en 2002, M. Kontsevich, soulignait l'impact des nouvelles découvertes en physique théorique : « Auparavant, il y avait un centre principal de mystères, le groupe de toutes les conjectures qui lient la théorie des nombres, les motifs des variétés algébriques, par l'intermédiaire des fonctions L (la généralisation de la fonction zêta de Riemann) aux fonctions automorphes, c'est-à-dire l'analyse harmonique sur les espaces localement homogènes. Maintenant la théorie des champs quantiques et la théorie des cordes sont un deuxième centre de mystères et donnent une autre profondeur et de nouvelles perspectives aux mathématiques. » Ces deux centres sont bien entendu toujours extrêmement actifs, et l'on voit même se tisser des liens entre les deux, par exemple, d'une part, *via* la version géométrique de la correspondance de Langlands, d'autre part, *via* la résolution, à l'aide de cohomologie quantique, de vieux problèmes de géométrie énumérative. Cette résolution en a d'ailleurs inspiré une autre, de nature combinatoire, grâce à l'émergence de la géométrie tropicale. Il convient de remarquer au passage qu'à travers de telles interactions profondes avec d'autres disciplines extrêmement avancées, la combinatoire montre une maturité nouvelle.

2.3 COBORDISME ALGÈBRE

On assiste à un mouvement de fusion entre la topologie algébrique et la géométrie algébrique, qui devrait trouver des applications importantes dans ces deux domaines. Cette fusion semble comparable en profondeur à l'avènement de la géométrie arithmétique, qui a révolutionné la théorie des nombres (et à un moindre degré la géométrie algébrique) depuis un quart de siècle.

Au-delà de grands problèmes, se développent régulièrement des idées nouvelles, dont la classification n'est pas toujours aisée ou souhaitable : citons sans exhaustive

Les techniques de concentration de la mesure, développées par M. Talagrand, qui ont essaimé en statistique ou en optimisation combinatoire aléatoire ; elles permettent notamment des contrôles uniformes et précis de familles dénombrables de processus empiriques. Ces résultats se sont avérés extrêmement précieux aussi bien du point de vue théorique que pratique, en permettant notamment de dégager des formes précises de pénalités intervenant dans des critères statistiques de sélection de modèle. Actuellement, les inégalités de concentration sont toujours très largement développées dans le cadre de l'apprentissage statistique.

Le laplacien hypoelliptique, récemment introduit par J.M. Bismut, qui donne une nouvelle approche de la théorie des invariants des variétés par déformation. Elle met en lumière des liens renforcés entre la topologie différentielle, la géométrie symplectique, l'analyse microlocale, les théories cinétiques et les processus stochastiques. Outre des structures géométriques riches, l'étude de cet objet sollicite des outils d'analyse sophistiqués.

Le transport optimal, remis au goût du jour avec les travaux de Y. Brenier, sur une approche variationnelle des problèmes de l'hydrodynamique, il se développe actuellement dans le contexte de la géométrie riemannienne et également en lien avec la théorie des probabilités.

La théorie des ondelettes, issue de l'analyse harmonique, qui a permis des interactions fécondes depuis une quinzaine d'années entre de nombreux domaines (de la physique théorique aux statistiques en passant par le traitement du signal) ; citons en exemple les procédures de seuillage utilisées en débruitage ou en compression (jpeg2000) des signaux, directement inspirées de la théorie de l'approximation dans les espaces de Besov. Objets mathématiques introduits indépendamment dans divers contextes, souvent très appliqués, les ondelettes, une fois identifiées comme identiques, ont conduit à de très rapides transferts de technologie et à une grande variété d'applications.

Ces développements s'avèrent souvent extrêmement précieux aussi bien du point de vue théorique que pratique, et illustrent, si besoin était, la nécessité pour le CNRS de maintenir des liens forts au sein de la communauté mathématique.

3 – INTERACTIONS

Plus que jamais, les grandes questions des domaines où les mathématiques sont un outil conceptuel important restent une source majeure de thèmes mathématiques ; réciproquement, des théories mathématiques développées ou non dans le cadre d'une interaction, trouvent un accomplissement dans une autre direction.

Voici d'abord quelques exemples d'interactions avec des domaines variés de la physique :

Les équations aux dérivées partielles, quels que soient leur provenance et leur statut (dérivées de lois fondamentales ou modèles ad hoc). Dans ce cadre, l'analyse dans l'espace des phases et ses liens multiples (théorie cinétique, spectrale, géométrie symplectique, kählerienne, quantification) s'est diffusée avec bonheur dans de multiples secteurs (ondelettes et traitement du signal, asymptotique haute fréquence en propagation d'ondes, etc.). Le calcul pseudo-différentiel devient une commodité pour l'ensemble de la communauté scientifique, ce qui pourrait en retour engendrer de nouvelles questions mathématiques.

Les structures algébriques et combinatoires, sous-jacentes à certaines théories physiques (théorie des groupes et de leurs représentations, diverses théories algébriques associées). Les questions de quantification font appel à un arsenal varié de techniques, notamment les méthodes algébriques de la théorie des déformations, ainsi que les algèbres de Lie de dimension infinie.

Les structures géométriques, sous-jacentes à la mécanique, géométrie symplectique et systèmes intégrables par exemple, mais aussi divers aspects de **la théorie des systèmes dynamiques**, tels que la théorie du chaos déterministe et l'analyse des transitions de phase ou de la transition vers le chaos.

Les aspects probabilistes de la mécanique statistique et de la thermodynamique, notamment la dérivation d'équations macroscopiques à partir de modèles microscopiques de systèmes de particules, l'analyse des interfaces de la matière condensée, l'invariance conforme de la matière molle à grande échelle (théorie de la percolation critique, équation de Loewner stochastique).

Les probabilités non commutatives, motivées initialement par la mécanique quantique et la distribution des niveaux d'énergie, et qui couvrent aujourd'hui un large champ allant des grandes matrices aléatoires à une conjecture d'A. Connes sur les représentations du groupe symétrique.

La consistance de certaines théories physiques. La renormalisation en théorie quantique des champs a connu un renouveau venu de points de vue différents (théorie spectrale, probabilités non commutatives, modèles de champ moyen, homogénéisation aléatoire).

Les interactions avec l'informatique sont également nombreuses.

Les théories de la complexité et de la preuve se sont développées parallèlement à l'outil informatique. En liaison avec la logique, l'algorithmique, la combinatoire ou le calcul formel, elles forment le cœur de l'interaction avec l'informatique.

Nouvellement apparu, **l'apprentissage statistique** est un domaine transverse entre statistique et informatique. Il désigne un ensemble de procédures statistiques et algorithmiques dont le but est d'extraire une information pertinente d'un grand jeu de données afin de répliquer et de généraliser de manière automatique des comportements (souvent humains) obtenus sur des d'exemples. Les applications de ces méthodes d'apprentissage

automatiques sont très nombreuses, citons par exemple l'indexation de bases de données textuelles, audio, l'indexation d'images, la reconnaissance de visages ou d'empreintes digitales, l'analyse de séquences biologiques, de biopuces, de réseaux de régulation de gènes, etc. Le succès de l'apprentissage statistique montre que les informaticiens sont devenus des interlocuteurs privilégiés pour les statisticiens. De fait, de nombreux problèmes sont communs aux deux domaines. Du point de vue des applications, les deux approches sont complémentaires et permettent d'aboutir à des procédures pertinentes d'un point de vue statistique et réaliste du point de vue algorithmique.

Au-delà de la physique ou de l'informatique, d'autres domaines, comme la chimie, la biologie, les sciences de l'ingénieur ou de l'information, recèlent aussi des problèmes mathématiques majeurs, dont certains apparaissent dans les prochaines sections.

Ces quelques exemples, comme ceux qui suivront, montrent qu'en dépit d'une spécialisation toujours plus poussée dans la plupart des sous-domaines, les grandes avancées ou les progrès significatifs sont le plus souvent le produit d'une mutualisation, ou simplement de la cristallisation, d'efforts convergents; en parallèle, la réactivité s'accroît en proportion, et il n'est pas rare qu'un transfert d'expertise soit opéré par ceux qui la possèdent le mieux, illustrant la connexité des thématiques ou celle qui lie les grands domaines d'applications aux outils qu'ils partagent.

4 – MODÉLISATION ET CALCUL

Sont regroupées dans cette section des mathématiques opérationnelles, qui conduisent à des résultats quantitatifs dans des domaines technologiques variés. La liste suivante pointe divers exemples significatifs, et bien

représentés en France; elle n'a pas pour but d'être exhaustive.

4.1 MODÉLISATION À BASE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (EDP)

Les lois fondamentales de la nature (à la source des phénomènes exploités par le développement technologique) s'expriment le plus souvent en terme de systèmes d'EDP; il faut les dériver, en liaison avec leur domaine de provenance, éventuellement les simplifier, puis le plus souvent les (re)valider. L'école mathématique française est en pointe sur le sujet, et peut même être considérée comme pionnière.

4.2 MODÉLISATION STOCHASTIQUE ET STATISTIQUE

La plupart des études scientifiques et industrielles génèrent une multitude de données dont l'analyse constitue le but ultime. Le principe de la statistique mathématique est de supposer que ces données sont des réalisations de variables aléatoires. Le point de vue stochastique modélise un phénomène par une loi de probabilité qui régit le comportement des variables aléatoires observées.

Utilisée dans des situations par essence probabilistes (comme en mécanique statistique), la modélisation stochastique décrit également les incertitudes dans les modèles (coefficients mal connus, bruit dans le système, incertitude numérique) ainsi que les réseaux de file d'attente, omniprésents dans les télécommunications modernes. L'interaction avec les EDP est donc en pleine expansion, en particulier pour ce qui concerne la discrétisation et le calcul des solutions d'EDP stochastiques. Associée aux statistiques, elle permet d'obtenir des renseignements sur la manière dont le hasard est structuré. Les statistiques peuvent

s'appliquer dans tous les domaines générant des données à analyser. Elles sont largement utilisées dans les sciences de la vie et les sciences humaines.

La modélisation stochastique et les statistiques ont rencontré ces dernières années un essor considérable en fournissant des outils d'analyse à la fois puissants sur le plan théorique et performants en pratique.

4.3 OPTIMISATION ET CONTRÔLE

On entend ici l'optimisation continue, l'optimisation en nombre entier (notamment en recherche opérationnelle) ou l'optimisation stochastique, ainsi que l'optimisation de forme. Les interactions continu-entier sont génératrices de nouveautés, et les échanges avec l'informatique y sont indispensables. Le contrôle stochastique ou déterministe va jouer (et joue déjà!) un rôle considérable dans le monde industriel pour l'optimisation des ressources, qu'il s'agisse des coûts, de l'énergie, etc.

4.4 TRAITEMENT DU SIGNAL ET DE L'IMAGE

Il constitue un domaine à part entière, mais qui intervient également pour le traitement de données réelles et l'utilisation comme paramètres dans les codes, ou comme post-traitement après calcul numérique. L'avènement des ondelettes et le développement de plusieurs écoles de traitement de l'image positionne la France à la pointe du domaine.

4.5 CALCUL SCIENTIFIQUE

On rassemble sous ce terme l'ensemble des technologies numériques utilisées pour

calculer concrètement le résultat des différents modèles. Il s'agit de la production de méthodes numériques qui répondent à des impératifs mathématiques et qui s'appuient sur la structure mathématique de systèmes et pas uniquement sur les caractéristiques des applications. Il y a là une différence entre le calcul scientifique tel qu'il est pratiqué en section 01 et (par exemple) chez les physiciens. Les deux approches sont différentes et bien souvent complémentaires, et les collaborations sont évidemment nécessaires et à encourager.

5 – GRANDS DOMAINES D'APPLICATIONS

Les quelques points qui suivent, dont la liste n'est évidemment pas exhaustive, soulignent quelques problèmes typiques qui nous semblent majeurs en termes d'applications.

5.1 CHIMIE ET MATÉRIAUX

Cela concerne la chimie quantique (déjà bien implantée, à cheval sur le CNRS et l'INRIA, en région parisienne). Les champs d'applications sont immenses. Les défis technologiques (fabrications de codes de calcul permettant la mise au point de molécules) et scientifiques (compréhension des équations de la mécanique quantique, du couplage avec les modèles relativistes) en font des enjeux à la fois industriels et mathématiques. Un autre aspect concernant l'industrie chimique tourne autour du génie des procédés, où l'apport des mathématiques consiste en la mise au point de modèles et de méthodes, sachant que les puissances de calcul disponibles aujourd'hui permettent de traiter des cas réalistes.

5.2 BIOLOGIE ET MÉDECINE

De nombreux projets se développent sur ce sujet en expansion rapide (par exemple, en neurosciences). Les biologistes et les médecins attendent des résultats quantitatifs, requérant du calcul. De nombreux domaines des mathématiques sont concernés : traitement de l'image, mécanique des fluides, mécanique des structures, statistiques, mathématiques discrètes. Une approche phénoménologique est parfois nécessaire, ce qui n'est pas encore dans l'habitude des mathématiciens. Il s'agit à la fois de collaborations pluridisciplinaires mais aussi de relations industrielles avec les start-ups de bio-technologie.

Remarquons que ces deux premières applications sont en relation avec des disciplines qui ne sont pas rattachées à MPPU et qui sont sans doute appelées à se développer énormément dans les prochaines années.

5.3 GÉNOMIE

Les techniques d'expérimentation hauts débits développées ces dernières années font de la génomie un secteur très demandeur des techniques d'analyse statistique. Il s'agit par exemple d'obtenir des procédures de séquençage automatiques ou de regroupement de gènes par familles fonctionnelles. Ces recherches sont développées avec le soutien du CNRS à la génopôle d'Évry, entre autres.

5.4 PROBLÈMES ÉNERGÉTIQUES ET D'ENVIRONNEMENT

On entend par là les questions liées à la production d'énergie (fusion par confinement magnétique, stockage de déchets, etc.). La partie stockage de déchets est bien représentée au sein de la section 01 via le GdR MOMAS,

mais il n'y a eu aucune dynamique concernant les mathématiques autour d'ITER. Les problèmes d'évolution du climat, de catastrophes naturelles restent à l'ordre du jour du point de vue de la modélisation et de la simulation, alors même que les relations institutionnelles avec les autres grands organismes (CEA, CEMAGREF, INRA, etc.) sur ces sujets sont inexistantes ou presque.

5.5 TRANSPORTS

L'aéronautique, l'automobile posent des problèmes très variés allant par exemple de la gestion des flux routiers à des questions de compatibilité électromagnétique (matériel embarqués/environnement). Même s'il s'agit d'applications traditionnelles des mathématiques, les domaines d'activités restent extrêmement actifs, les enjeux technologiques sont importants et les problèmes se renouvellent en continu (en particulier en liaison avec les problèmes d'environnement : bruit, pollution).

5.6 AIDE À LA DÉCISION

Les mathématiques financières, l'actuaire et la recherche opérationnelle sont au cœur de processus industriels où les problèmes mathématiques sont d'une grande complexité. L'investissement du CNRS dans ce domaine n'est que trop rarement le fait de la section 01, alors même que les techniques stochastiques ont connu un formidable essor dans l'ajustement des instruments financiers ; le problème important du pricing d'instruments financiers (les options par exemple) a été résolu dans le contexte des processus stochastiques. Depuis lors, des outils probabilistes sont développés spécifiquement pour ces questions, et il existe des contacts étroits entre chercheurs du domaine et établissements financiers.

5.7 TÉLÉCOMMUNICATION ET TRANSMISSION DE L'INFORMATION

On entend par là les problèmes de codage, de cryptologie, d'électromagnétisme (ondes hertziennes, fibres optiques, etc.), réseaux de files d'attente, où les avancées récentes (stimulées par les perspectives de développement) ont été très importantes et où les transferts de technologie se font presque instantanément du théorique à l'appliqué.

5.8 NANOTECHNOLOGIES

C'est une priorité du CNRS en général, et plusieurs laboratoires de mathématiques sont déjà positionnés sur ce sujet. Il convient néanmoins de suivre attentivement ce sujet et ses développements incessants.