CONSEIL SCIENTIFIQUE DE
L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET DE LEURS INTERACTIONS

Mandat 2010-2014

Composition du Conseil scientifique au 1er juin 2014
Nalini ANANTHARAMAN, Colette ANNÉ, Pascal AUSCHER (membre du bureau), Karine BEAUCHARD, Ugo BOSCAIN, Mireille BOUSQUET-MÉLOU, Yann BRENIER, Nathalie CATRAIN, Peggy CÉNAC-GUESDON, Jean-Marc COUVEIGNES (membre du bureau), Christine DISDIER, Jean-Marc GAMBAUDO, Olivier GIPOULOUX (secrétaire scientifique), Christian KASSEL (président), Olivier LEY, Christophe PRUD'HOMME, Raphaël ROUQUIER, Ellen SAADA (membre du bureau), Jean-Marc SAC-EPÉE, Etienne SANDIER, Michèle THIEULLEN, Sandro VAIENTI

RAPPORT DE PROSPECTIVE

I. INTRODUCTION

Héritière d'une longue tradition marquée par une succession de grands mathématiciens[1], l'école mathématique française continue à faire preuve d'une grande vitalité, plaçant notre pays parmi les tout premiers au niveau mondial. Les prix internationaux récoltés en ce début du 21e siècle par des mathématiciens[2] de l'école française en témoignent. Pour ne mentionner que les plus connus, rappelons les Médailles Fields obtenues par Artur Avila en 2014, Cédric Villani et Ngô Bảo Châu en 2010, Wendelin Werner en 2006 et Laurent Lafforgue en 2002, le Prix Carl-Friedrich-Gauss pour les mathématiques appliquées attribué à Yves Meyer en 2010, le Prix Abel à Mikhail Gromov en 2009, à Jacques Tits en 2008 et à Jean-Pierre Serre en 2003, le Prix Wolf pour les mathématiques à Jean-Pierre Serre en 2000, le Prix Crafoord à Maxime Kontsevich en 2008 et à Alain Connes en 2001, le Prix Salem à Nalini Anantharaman en 2010, le prix Henri-Poincaré à Cédric Villani en 2008 et à Nalini Anantharaman et Sylvia Serfaty en 2012.

Les invitations au Congrès International des Mathématiciens de Séoul (août 2014) montrent de même la place éminente tenue par les mathématiciens français au niveau mondial. Sur 21 conférenciers pléniers, 3 sont français. Parmi les 179 autres conférenciers invités, on ne compte pas moins de 37 mathématiciens formés ou en poste en France, dont 7 femmes, répartis comme suit : logique (2), théorie des nombres (4), géométrie algébrique et complexe (1), géométrie (1), topologie (1), théorie de Lie (6), systèmes dynamiques et équations différentielles ordinaires (3), équations aux dérivées partielles (4), physique mathématique (4), probabilités et statistique (2), analyse numérique et calcul scientifique (2), théorie du contrôle et optimisation (3), mathématiques en science et technologie (2), formation mathématique et vulgarisation (1), histoire des mathématiques (1).

[1] Du 17e siècle à la première moitié du 20e siècle, on peut citer Descartes, Fermat, Pascal, d'Alembert, Lagrange, Monge, Laplace, Fourier, Poisson, Galois, Poincaré, Hadamard, Lebesgue.
[2] Dans ce rapport le mot « mathématicien » désigne aussi bien les mathématiciens hommes que les femmes mathématiciennes.

Avec la création en 2010 de l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI), les mathématiques occupent pour la première fois au CNRS une place institutionnelle propre, à l'égal des autres grands champs disciplinaires. Pour la première fois aussi, les mathématiques disposent au CNRS d'un conseil scientifique. L'une des missions de ce conseil est la publication d'un rapport de prospective. Il ne s'agit pas de prédire ce que seront les mathématiques ou quels seront les progrès les plus marquants dans les vingt ou trente prochaines années. Ce serait non seulement une gageure, mais n'aurait pas grand sens. En effet, l'Histoire a montré que nombre de découvertes scientifiques ont été réalisées là où précisément on ne les attendait pas. On peut cependant tenter de dégager certaines tendances dans le domaine des mathématiques ainsi que les défis auxquels la recherche mathématique fait face, voire les risques susceptibles de la mettre en danger. Sur certains points, on ne sera pas étonné de constater que notre analyse est proche de celle d'autres rapports de prospective publiés récemment[3] (notamment par la Société de mathématiques appliquées et industrielles (SMAI) en France, par la *European Science Foundation*, par la *Society for Industrial and Applied Mathematics* et par *The National Academies Press* aux États-Unis).

Le présent rapport, avant tout destiné à l'INSMI, déborde naturellement du cadre du CNRS[4] ; il pourra intéresser l'ensemble de la communauté mathématique française, qui est majoritairement universitaire. Par ailleurs, les mathématiques françaises ont un spectre extrêmement large et la plupart des domaines (pas tous) sont représentés — à très haut niveau — dans notre pays. Aussi n'avons-nous pas cherché à distinguer plus particulièrement les mathématiques produites en France de celles qui le sont ailleurs dans le monde.

Si l'on excepte un rapport de prospective sur les mathématiques appliquées et industrielles publié en 2008 par la SMAI, la rédaction d'un tel rapport est pour les mathématiciens français un exercice nouveau, dont nous avons très vite perçu la difficulté. Dès la mise en place du Conseil scientifique, nous nous sommes organisés en groupes de travail thématiques destinés entre autres à alimenter notre futur rapport de prospective; mais il nous est rapidement apparu que la rédaction du rapport ne pouvait être entreprise par les seuls membres du Conseil. Aussi nous sommes-nous tournés vers la communauté mathématique, en faisant appel à des collègues[5] (plus d'une centaine) susceptibles d'apporter une lumière particulière sur certains sujets. Que celles et ceux qui nous ont apporté leur contribution et enrichi notre réflexion soient ici très chaleureusement remerciés.

Si la méthode utilisée, qui a consisté à faire appel largement à des représentants de la communauté mathématique, a ses qualités, nous sommes conscients de ses nombreux inconvénients (arbitraire dans le choix des interlocuteurs, hétérogénéité des contributions, risques d'omission de certaines thématiques ou d'en privilégier).

Contenu du rapport

Le chapitre II brosse à grands traits la situation actuelle des mathématiques et les évolutions récentes de la discipline.

Au chapitre III nous présentons un certain nombre de domaines des mathématiques actifs avec leur évolution récente et leurs perspectives ; ce chapitre témoigne du spectre large, du niveau très élevé et de la vitalité de la recherche mathématique en France.

Le chapitre IV est consacré à l'ouverture des mathématiques et à la variété et la richesse des interactions qu'elles entretiennent avec la physique et la mécanique, l'automatique, l'informatique, la chimie et les sciences du vivant.

[3]Voir la bibliographie.
[4]Le CNRS n'a pas d'unité propre de recherche en mathématiques.
[5]Leurs noms apparaissent à la fin du rapport.

Au chapitre V nous traitons des relations des mathématiques avec deux domaines d'activité extérieurs au monde de la recherche, à savoir avec l'industrie et la finance.

La recherche mathématique a besoin d'un accès constant et pérenne à la littérature mathématique aussi bien ancienne que contemporaine. Le domaine de l'information scientifique et technique est actuellement en plein bouleversement. Nous y consacrons le chapitre VI.

Malgré l'évolution de la société et les textes réglementaires récents qui l'accompagnent, il y a une trop faible proportion de femmes tant parmi les mathématiciens professionnels que parmi les étudiants avancés. Ces questions de parité sont discutées au chapitre VII.

Le chapitre VIII est consacré à l'organisation institutionnelle collective des mathématiques en France et notamment au rôle structurant joué par le CNRS.

Enfin, le chapitre IX aborde la question fondamentale de la relève. Si la France veut garder son rang privilégié en mathématiques et répondre aux besoins scientifiques et techniques croissants de la société, il lui faudra investir dans l'avenir, c'est-à-dire dans l'emploi scientifique et la formation d'un grand nombre de jeunes aux sciences.

II. LES MATHÉMATIQUES : SITUATION ACTUELLE ET TENDANCES

Les mathématiques existent depuis la plus haute Antiquité. Dès ses origines la discipline s'est enrichie de ses liens avec les autres sciences, souvent en vue d'applications pratiques, et elle a de tout temps connu un développement propre, mû par la curiosité intellectuelle, qui est le premier moteur du chercheur scientifique[6].

Comme en témoignent les progrès fulgurants de ces dernières années, les mathématiques sont une science bien vivante. C'est également une science utile, impliquée dans bien des innovations technologiques qui affectent notre vie courante. Les mathématiques jouent un rôle traditionnellement important dans d'autres sciences comme la physique ou l'informatique ; ce rôle se développe rapidement dans les sciences du vivant, l'économie et les sciences humaines.

En mathématiques fondamentales, des résultats spectaculaires ont été obtenus ces dix dernières années, comme la preuve par Perelman de la conjecture de géométrisation de Thurston et de la fameuse conjecture de Poincaré, ou encore la preuve du « Lemme fondamental » (qui a résulté de travaux d'éminents représentants de l'école française). Les mathématiques fondamentales fournissent un langage et des outils communs à tous ceux qui travaillent de près ou de loin avec les mathématiques. Préserver et soutenir ce qui constitue le cœur des mathématiques est essentiel à l'essor de la discipline et de ses applications.

On observe la même vitalité dans les mathématiques orientées vers les applications et celles qui interagissent avec d'autres disciplines comme la physique, l'informatique ou les sciences du vivant. Aujourd'hui, plus que jamais, « les mathématiques ont rétabli, et parfois créé, des liens forts avec de nombreux secteurs économiques et avec les autres sciences. La frontière entre mathématiques pures et mathématiques appliquées est devenue perméable : les mathématiques les plus fondamentales servent à résoudre des problèmes concrets de plus en plus difficiles alors que de nouveaux problèmes théoriques sont posés par des questions appliquées. »[7] De plus, comme le note un rapport américain récent [8] , deux phénomènes augmentent considérablement les

[6]Par ce terme nous désignons toutes celles et tous ceux qui pratiquent la recherche scientifique à titre professionnel.

[7]Citation tirée de l'avant-propos de la brochure *Mathématiques : l'explosion continue.*

[8] *The mathematical sciences in 2025*, The National Academies Press, USA.

possibilités d'interaction des mathématiques avec le monde extérieur : d'une part l'utilisation généralisée de simulations numériques basées sur des concepts mathématiques et rendues possibles par des outils informatiques de plus en plus puissants, d'autre part l'accroissement exponentiel de données massives à traiter.

Si mathématiques fondamentales et mathématiques appliquées ont parfois des pratiques différentes, la distinction entre elles devient de plus en plus artificielle. Jusqu'au milieu du 20e siècle il existait des domaines mathématiques de portée purement théorique et sans aucune application concevable, mais on peut affirmer aujourd'hui que tout domaine des mathématiques, aussi abstrait soit-il, est susceptible d'applications pratiques. On cite souvent, à juste titre, l'arithmétique, longtemps considérée comme un pur jeu de l'esprit ; de nos jours elle a de multiples applications pratiques grâce aux progrès de la cryptographie fondés sur des résultats importants de théorie des nombres. Aujourd'hui les mathématiques sont fortement impliquées dans la vie courante : imagerie médicale, prévisions météorologiques, simulations sur ordinateur, analyse des risques dans les assurances ou la finance, recherche sur Internet, etc. Comme l'écrit le rapport de prospective *"Mathematics and Industry"* publié par la *European Science Foundatio*n (ESF) en 2010 : *"It is evident that, in view of the ever-increasing complexity of real life applications, the ability to effectively use mathematical modelling, simulation, control and optimisation will be the foundation for the technological and economic development of Europe and the world."*

Malgré une spécialisation de plus en plus poussée, le champ mathématique conserve une grande unité. On remarque cette unité tout particulièrement dans une tendance qui se dessine de plus en plus dans les mathématiques contemporaines, à savoir l'obtention de résultats impliquant plusieurs domaines des mathématiques. Un exemple emblématique de cette tendance a été la démonstration de la conjecture de Poincaré. Cette dernière, qui s'énonce en termes purement topologiques, avait été, pendant près de cent ans, attaquée — en vain — par les topologues. La démonstration inattendue, obtenue dans les années 2000 par Perelman, repose sur des idées utilisant de la géométrie et de l'analyse. De même, on a pu ces trente dernières années assister à des convergences inédites entre géométrie et physique théorique (par exemple, pour compter le nombre de courbes de degré donné sur une surface algébrique). La fertilisation croisée entre divers domaines des mathématiques crée de nouveaux ponts, souvent surprenants et spectaculaires, et tend à estomper les frontières qui traditionnellement divisaient les différentes spécialités. Il faut encourager cette tendance, notamment dans la formation des doctorants et des jeunes chercheurs, et dans la reconnaissance des carrières.

Récemment sur un plan mondial il y a eu une multiplication de créations d'instituts dédiés à la recherche en mathématiques. Ces instituts réunissent des mathématiciens, jeunes ou confirmés, pour des périodes plus ou moins longues, généralement de l'ordre de quelques semaines ou de quelques mois, autour de thèmes prédéfinis. Ils jouent un rôle important dans la « formation continue » des mathématiciens, dans leur ouverture à de nouveaux domaines et dans la création de nouveaux ponts entre différentes spécialités. On compte actuellement une cinquantaine de tels instituts dans le monde, dont certains de création très récente. Pour ce qui concerne la France, *l'Institut Henri Poincaré* (IHP) à Paris et le *Centre international de rencontres mathématiques* (CIRM) à Marseille ont connu des montées en puissance assez spectaculaires. *L'Institut des Hautes Études Scientifiques* (IHÉS), outre ses professeurs permanents, offre un programme attractif d'accueil de jeunes chercheurs au sein du réseau IPDE constitué de dix instituts européens. La France joue également un rôle moteur exemplaire dans la formation de mathématiciens dans les pays en développement avec le *Centre international de mathématiques pures et appliquées* (CIMPA) basé à Nice. Le projet CARMIN fédère ces quatre centres depuis 2011.

Parmi les autres tendances observées récemment, on peut noter la dissémination plus rapide, parfois instantanée, des résultats grâce à la mise en ligne des (pré)publications, notamment sur des archives ouvertes à vocation universelle, comme les plates-formes *arXiv* et *HAL* (cette dernière développée par le CNRS). Internet permet aujourd'hui à tout chercheur d'avoir un accès à une grande partie de la littérature mathématique. On conçoit aisément combien ces progrès ont profité à tous ceux dont les bibliothèques ne pouvaient, pour des raisons financières, souscrire qu'à très peu de revues scientifiques et à tous ceux, notamment dans les pays en développement, qui n'avaient jusqu'à récemment aucun accès à la littérature mathématique.

L'existence et l'expansion constante d'Internet sont également à l'origine de grands bouleversements dans le monde de l'édition scientifique où de nouveaux modèles économiques apparaissent. Il est difficile de prévoir lesquels vont s'imposer à terme. Cette question est d'autant plus importante que la recherche en mathématiques nécessite un accès à la littérature scientifique qui soit pérenne, stable, de qualité et économiquement viable. Pour plus de détails, voir le chapitre VI.

Internet a également permis l'émergence très récente de nouvelles pratiques comme celle des *blogs* ; issus souvent d'initiatives individuelles, ces blogs, pour certains déjà très fréquentés, permettent des discussions fructueuses sur des questions d'actualité et favorisent ainsi la dissémination d'idées nouvelles. Une autre pratique innovante dans la recherche consiste en collaborations massives comme dans le projet « *polymath* » initié par Gowers en 2009 dans le but d'obtenir la résolution de problèmes précis par un grand nombre de chercheurs disséminés un peu partout dans le monde. Notons aussi la création la même année de « *MathOverflow* », un site professionnel interactif qui permet aux chercheurs de poser des questions résistant à leurs efforts et à d'autres d'y répondre. Ce site permet d'accélérer la résolution de problèmes et est, en tant que tel, cité dans les publications.

III. LA RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre nous présentons un éventail non exhaustif, mais large, de la recherche mathématique, de ses évolutions récentes et de perspectives prometteuses. Ce chapitre témoigne du niveau élevé, de la grande variété et de la vitalité de la recherche française en mathématiques. Son maintien à un tel niveau de qualité est un enjeu important pour les moyen et long termes.

Ainsi qu'il a été dit dans l'introduction, le choix des domaines présentés a été fortement conditionné par les contributions que nous avons pu obtenir auprès des collègues contactés. Insistons sur le fait que l'absence d'un thème ou sa présentation trop sommaire ne signifie nullement que le Conseil scientifique porte un jugement de valeur négatif sur lui.

1. Logique et fondations

La logique mathématique a profondément évolué dans les quarante dernières années en France. Une partie de celle-ci, la théorie des modèles et la théorie des ensembles, est restée dans le giron des mathématiques tandis qu'une partie de plus en plus importante, la théorie de la démonstration, la calculabilité et la complexité, basculait lentement du côté de l'informatique (voir la partie IV.3.2).

Théorie des modèles. La théorie des modèles se divise traditionnellement en deux parties : la théorie des modèles dite *pure* et la théorie des modèles dite *appliquée*. La théorie pure cherche à démontrer des théorèmes généraux, de structure ou d'existence à partir d'hypothèses sur une théorie. Après s'être concentré sur la classification des modèles (théorie de la stabilité), l'intérêt s'est déplacé vers les interactions entre ensembles définissables, et leurs propriétés combinatoires (stabilité géométrique). La théorie appliquée s'occupe de structures algébriques concrètes (anneaux, groupes, corps, etc.) Elle permet de mettre en lumière des uniformités dans le comportement de familles définissables, ou même de structures (uniformité en p dans les corps p-adiques, comportement asymptotique des corps finis, etc.).

Néo-stabilité. Les vingt dernières années ont vu une généralisation des techniques de stabilité à des contextes instables, notamment aux théories simples et aux théories o-minimales. Les développements récents montrent un lien fort entre la combinatoire additive, la théorie des groupes stables et la théorie des mesures de Keisler, et ont entraîné des applications aux sous-groupes approximés. D'autres développements en combinatoire additive sont attendus.

La o-minimalité. Les structures *o*-minimales ont la propriété que leurs sous-ensembles définissables n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes, ce qui a des conséquences d'uniformité très fortes pour les familles d'ensembles définissables. De nombreuses expansions du corps des réels sont *o*-minimales, notamment celle obtenue en ajoutant au corps des réels la fonction exponentielle ainsi que les fonctions analytiques restreintes à un domaine compact. Un résultat récent et spectaculaire compte le nombre de points rationnels de hauteur bornée dans la partie essentiellement transcendante de certains ensembles définissables, et a déjà eu des applications multiples à la théorie des nombres, notamment une nouvelle preuve de la conjecture de Manin-Mumford et des avancées sur la conjecture d'André-Oort.

Théorie des modèles des corps avec opérateurs. Cette partie est centrale pour les applications à des problèmes de géométrie diophantienne, tels les conjectures de Mordell-Lang, de Manin-Mumford, d'André-Oort, de Denis, et plus récemment des questions sur les systèmes dynamiques algébriques.

Théorie des modèles des corps valués. Son développement a eu des applications en intégration motivique. Des travaux récents jettent un regard nouveau sur les espaces de Berkovich et ont permis d'étendre des résultats portant sur les courbes à des variétés de dimension supérieure.

Théorie descriptive des ensembles. Alors que les liens entre la théorie descriptive et la théorie des ensembles (surtout les questions de détermination de jeux infinis) et aussi la calculabilité étaient encore très forts pendant les années 1980 et 1990, ces liens se sont desserrés depuis.

Depuis une vingtaine d'années, la théorie descriptive s'est en majorité développée dans deux directions. D'une part, on a vu la naissance des études véritablement pluridimensionnelles, notamment sur la structure des relations d'équivalence boréliennes et analytiques, mais aussi dans des domaines purement combinatoires. D'autre part, de très fécondes interactions avec un nombre croissant d'autres domaines mathématiques ont été à l'ordre du jour.

Un des thèmes est la comparaison des problèmes de classification en analyse, algèbre, etc. Ces recherches visent à calculer la complexité des invariants nécessaires pour classifier les objets appartenant à un domaine donné. Ce programme a été achevé notamment en analyse fonctionnelle (espaces de Banach, algèbres d'opérateurs) et en théorie ergodique.

Un autre thème a connu une renaissance dans les deux dernières décennies, à savoir l'étude des groupes topologiques polonais et des groupes d'automorphismes des structures dénombrables issues de la théorie des modèles. Dans ce contexte, plusieurs facettes ont été abordées dont les aspects harmoniques (représentations unitaires et affines), dynamiques (actions minimales et moyennabilité) et des phénomènes de rigidité topologique (continuité automatique).

Finalement, la théorie de Ramsey, dont certains procédés techniques sont de nature ensembliste, voit son importance croître dans divers domaines mathématiques, par exemple en théorie des nombres et en géométrie des espaces de Banach.

A l'avenir on verra sans doute disparaître les barrières entre la théorie descriptive et les domaines connexes. Il existe déjà une grande intégration entre la théorie descriptive et la théorie ergodique ; les questions abordées et méthodes employées sont les mêmes dans les deux thématiques.

2. Théorie des nombres et géométrie arithmétique

Plusieurs domaines de la théorie des nombres et de la géométrie arithmétique ont été particulièrement actifs ces dernières années et offrent des perspectives de futurs développements spectaculaires.

Théorie des nombres premiers. Une des principales conjectures en mathématiques est l'hypothèse de Riemann. Elle est toujours ouverte et continue de susciter de nombreux travaux dont il est difficile de prévoir s'ils conduiront à une solution définitive à court ou moyen terme. Concernant la théorie des nombres premiers, les percées récentes les plus significatives viennent de la théorie additive des nombres, avec des résultats de tout premier plan sur les petites différences entre nombres premiers et sur la conjecture de Goldbach ternaire ; ils permettent d'espérer atteindre les solutions du problème des nombres premiers jumeaux et de la conjecture de Goldbach.

Géométrie diophantienne. Un événement relativement récent est l'apport de la théorie des modèles pour résoudre des problèmes de géométrie diophantienne. Des progrès importants en direction des conjectures d'André-Oort et Zilber-Pink, utilisant la *o*-minimalité, n'ont pas pu être obtenus par d'autres voies.

La méthode des pentes et la théorie d'Arakelov ont fourni des outils bien adaptés aux questions diophantiennes. C'est maintenant le cadre habituel des énoncés et des démonstrations.

Le théorème du sous-espace de W. M. Schmidt avec ses nombreuses variantes continue d'être raffiné et généralisé et ses conséquences sont loin d'être épuisées : c'est un des plus puissants énoncés de théorie des nombres, mais il souffre du défaut de ne pas être effectif. Ses applications débordent largement la théorie de l'approximation et des équations diophantiennes ; elles concernent également les systèmes dynamiques. Ses applications à la complexité des nombres algébriques permettent d'obtenir les premiers énoncés significatifs en direction de questions posées par E. Borel il y a plus d'un demi-siècle.

Géométrie non archimédienne. Là aussi la théorie des modèles a eu des applications importantes, notamment sur les espaces analytiques non archimédiens au sens de Berkovich.

Formes automorphes. Le programme de Langlands a donné lieu à des travaux de tout premier plan, notamment la preuve du « Lemme fondamental ». Ce thème de recherche est fertile et en pleine évolution. Citons aussi la démonstration de la conjecture de Sato-Tate, un énoncé statistique sur le nombre de points d'une courbe elliptique modulo p quand p varie, ou encore celle de la conjecture d'Artin en dimension 2 pour des corps totalement réels.

Motifs. Les nombres *multizêtas* interviennent non seulement en théorie des nombres, mais dans bien d'autres domaines, y compris en physique théorique avec les diagrammes de Feynman. Bien que leur définition soit élémentaire, pour établir certaines de leurs propriétés il faut passer par la théorie des motifs, et c'est dans ce cadre que des progrès d'une portée majeure viennent d'être réalisés en France, notamment le fait que la catégorie tannakienne des motifs mixtes de Tate sur les entiers est engendrée par le groupe fondamental motivique de la droite projective moins trois points. Le rêve de disposer d'un groupe de Galois motivique est en train de se réaliser.

En conclusion, les outils et méthodes intervenant dans les travaux récents de théorie des nombres sont de plus en plus sophistiqués ; ils proviennent de domaines des mathématiques parfois éloignés, et les résultats trouvent souvent des applications à des questions qui à première vue ne semblent pas arithmétiques.

3. Géométrie algébrique

Géométrie algébrique complexe. Mentionnons quelques thèmes en développement rapide.

Classification des variétés algébriques, modèles minimaux. Ce domaine, qui s'est développé dans les années 1980 à la suite des travaux de Mori, a vu des avancées considérables dans les dix dernières années : l'existence de modèles minimaux pour les variétés de type général et la finitude de l'anneau canonique. Il reste encore de grandes questions dans ce sujet, la plus importante étant sans doute la « conjecture d'abondance ». Ce domaine très étudié est d'une grande difficulté technique.

Variétés spéciales. À côté des théorèmes de structure généraux, certaines classes de variétés sont particulièrement intéressantes. C'est le cas des variétés rationnellement connexes, qui ont été beaucoup étudiées ces dernières années. Parmi les problèmes qu'elles soulèvent, les questions de rationalité et d'unirationalité), bien que datant parfois de plus d'un siècle, restent encore mal comprises, et méritent de nouveaux efforts. Une autre catégorie est celle des variétés de Calabi-Yau, et en particulier des variétés symplectiques holomorphes. Leur étude a beaucoup progressé ces dernières années, avec notamment le « théorème de Torelli » de Verbitsky ; elle pose encore de nombreux problèmes (groupes de cycles, fibrations lagrangiennes) qui semblent accessibles, au moins en partie, et qui vont certainement être beaucoup étudiés dans un futur proche.

Cycles algébriques et cohomologie. Plus de cinquante ans après les « conjectures standard » formulées par Grothendieck, les groupes de cycles algébriques (« groupes de Chow ») et leur relation avec la cohomologie reste toujours mystérieuse. Si les conjectures standard n'ont guère avancé, quelques progrès ont été faits récemment dans la direction d'une autre conjecture très profonde, due à Bloch et Beilinson, qui éclaire la structure des groupes de Chow, par exemple pour les surfaces *K3* et leurs produits. Ce domaine devrait continuer à se développer, en liaison avec la théorie de Hodge qui reste un sujet actif.

Géométrie algébrique dérivée. Initiée essentiellement en URSS dans les années 1980, l'étude de la catégorie dérivée des faisceaux cohérents sur une variété algébrique est un domaine en pleine expansion. On sait maintenant que la catégorie dérivée est un invariant qui contient beaucoup d'information sur la variété. La relation avec la théorie de Hodge est très prometteuse. La « géométrie algébrique dérivée », qui s'est développée depuis quelques années, pouvait encore récemment passer pour périphérique, mais elle semble maintenant ouvrir beaucoup de perspectives.

Espaces de modules des courbes. Ce sujet a deux aspects très liés, la cohomologie des espaces de modules et les invariants de Gromov-Witten. Le premier est dominé par des conjectures de Mumford, Faber et Zagier ; une bonne partie en a été démontrée dans les dernières années, mais il reste du travail. La théorie de Gromov-Witten est maintenant bien comprise en genre 0; son étude en genre > 0 va sans doute se développer dans les années à venir.

Géométrie algébrique réelle. C'est une des branches les plus anciennes de la géométrie algébrique en relation avec la première partie du 16e problème de Hilbert (sur la classification topologique des courbes non singulières dans le plan projectif réel). La topologie des variétés algébriques réelles a connu des progrès spectaculaires dans la deuxième moitié du 20e siècle, période où des phénomènes généraux en topologie des variétés algébriques réelles ont été découverts et de nombreux résultats sur les courbes et surfaces algébriques réelles ont été obtenus. Cette direction de recherche est toujours en pleine expansion. Les vingt dernières années ont été marquées par le début de l'étude détaillée des variétés algébriques réelles de dimension plus grande, en particulier de dimension 3. Elles ont aussi vu naître deux nouveaux domaines fort prometteurs : la géométrie symplectique réelle et la géométrie tropicale. La première est le point de rencontre des géométries algébrique réelle et symplectique, la seconde des géométries symplectique et torique.

Géométrie symplectique. Parmi les développements importants il y a 'introduction des courbes pseudo-holomorphes et de l'homologie de Floer. L'étude de cette dernièrer est un domaine en plein essor. Celle des pinceaux de Lefschetz et la géométrie tropicale devraient fournir des outils de calcul pour l'homologie de Floer, ce qui aurait de nombreuses conséquences, par exemple dans l'étude des systèmes dynamiques hamiltoniens, la géométrie algébrique complexe et la géométrie réelle.

Géométrie tropicale. Le monde tropical peut être vu comme une dégénérescence du monde complexe. En géométrie tropicale, les variétés algébriques sont replacées par certains complexes polyédraux. Le succès de la géométrie tropicale durant la dernière décennie a été motivé par ses liens multiples et profonds avec de nombreuses branches des mathématiques telles que la géométrie algébrique, la géométrie symplectique, l'analyse complexe, les systèmes dynamiques, la combinatoire géométrique et les modèles statistiques. Parmi les applications les plus importantes de la géométrie tropicale, on peut mentionner de nouveaux outils en géométrie énumérative, qui mènent à une approche combinatoire au dénombrement de courbes complexes et réelles. La géométrie tropicale est également intrinsèquement liée à la géométrie non archimédienne et aux espaces de Berkovich. Ces liens ne sont pas encore entièrement compris et leur exploitation mènera sans aucun doute à des applications fructueuses. Il convient également de mentionner une confluence des géométries réelle, tropicale et symplectique sous le terme de *symétrie miroir*, phénomène où les méthodes tropicales jouent un rôle très important.

Géométrie énumérative réelle. C'est une discipline en pleine expansion. Elle a connu un progrès remarquable ces dernières années avec la découverte d'un invariant à valeurs entières dans les problèmes de dénombrement de courbes rationnelles réelles dans les surfaces rationnelles réelles. Un problème extrêmement important du domaine est la construction d'une théorie générale des invariants énumératifs en géométrie réelle, algébrique ou symplectique, sous une forme analogue à la théorie de Gromov-Witten.

4. Algèbre

Théorie des représentations. La dernière décennie a vu se confirmer la richesse et la puissance des méthodes géométriques en théorie des représentations. Si ces méthodes sont naturelles pour les objets continus (groupes ou algèbres de Lie, groupes algébriques,...), elles n'ont cessé d'accroître leur domaine d'application, permettant d'attaquer par exemple des problèmes discrets (représentations de groupes finis, algèbres amassées,...). Une tendance plus récente est l'utilisation de la cohomologie à coefficients entiers (et non plus rationnels ou complexes) ; elle a permis, du côté géométrique, d'obtenir des invariants plus fins et, du côté algébrique, d'étudier les représentations en caractéristique positive. Parallèlement, une algébrisation croissante s'est mise en place, à travers la notion de *catégorification* et le recours aux catégories supérieures.

Parmi les résultats récents les plus spectaculaires, on peut mentionner

- la preuve du « Lemme fondamental » (déjà cité),
- la preuve de la conjecture de positivité des polynômes de Kazhdan-Lusztig pour tout groupe de Coxeter,
- la construction d'un contre-exemple aux importantes conjectures de Lusztig et de James décrivant la dimension de certains modules simples en caractéristique positive,
- la preuve d'une équivalence entre la catégorie *O* d'une algèbre de Hecke doublement affine rationnelle cyclotomique et une sous-catégorie d'une catégorie *O* parabolique de type A,
- le développement des interactions entre algèbres amassées et divers problèmes mathématiques (variétés de carquois, algèbres de Hall, invariants de Donaldson-Thomas, bases semi-canoniques, modules de Kirillov-Reshetikhin,...),
- des avancées dans la classification de singularités symplectiques quotients admettant une résolution symplectique,
- la caractérisation du groupe de Grothendieck-Teichmüller à travers les automorphismes homotopiques rationnels de l'opérade des petits disques.

Les travaux qui ont mené à la preuve de la conjecture de positivité et au contre-exemple à la conjecture de Lusztig continueront d'influencer ce domaine dans les années à venir, d'une part, en développant de nouvelles relations avec la théorie de Hodge et la topologie algébrique (méthodes diagrammatiques) ; d'autre part, en forçant à repenser ce qui peut remplacer les conjectures de Lusztig et de James.

On peut aussi attendre des répercussions en théorie des représentations à partir de la géométrie symplectique, que ce soit dans des domaines traditionnels d'application (méthode des orbites, schémas de Hilbert, singularités des orbites nilpotentes, *W*-algèbres), mais aussi peut-être en théorie des représentations des groupes réductifs finis, ce qui n'était pas imaginable il y a cinq ans.

Du côté du programme de Langlands, l'étude des espaces homogènes sur les corps locaux est en pleine effervescence. L'étude des représentations de Banach *p*-adiques de groupes réductifs *p*-adiques semble être promis à un bel avenir, notamment par ses liens avec une (espérée) correspondance de Langlands fonctorielle.

Les recherches sur le groupe de Grothendieck-Teichmüller s'orientent vers une généralisation au genre supérieur, mais aussi à la dimension supérieure avec des problématiques qui rejoignent ceux de la géométrie algébrique dérivée.

Enfin, l'explosion des méthodes de catégorification et de l'utilisation de catégories supérieures va continuer à bouleverser le domaine, en étendant toujours plus ses champs d'application.

Le domaine des groupes quantiques qui existe maintenant depuis trente ans est aussi bien lié à la théorie classique des représentations des algèbres et groupes de Lie qu'à la topologie de basse dimension ainsi qu'au groupe de Grothendieck-Teichmüller et aux nombres multizêtas. Il a également donné une impulsion nouvelle à la théorie purement algébrique des algèbres de Hopf. Ces dernières apparaissent sur les graphes de Feynman et ont permis de donner une explication conceptuelle à la renormalisation en théorie quantique des champs.

Algèbres d'opérateurs et géométrie non commutative. Le domaine recouvert par le terme de géométrie non commutative a été ouvert par Alain Connes autour de 1980. Il est à la croisée de l'analyse fonctionnelle et de la géométrie, mais les outils utilisés sont également algébriques. A l'origine, il s'agissait de démontrer les conjectures de Novikov et de Baum-Connes concernant des actions de groupes sur les variétés dans des situations singulières comme les feuilletages. C'est également à cette époque qu'est née la cohomologie cyclique qui généralise la cohomologie de de Rham dans ces situations singulières. Une décennie plus tard Voiculescu a inventé les probabilités libres dans le but d'étudier les algèbres de von Neumann des groupes libres. Cette théorie a trouvé un grand écho chez les probabilistes. Dans le même temps, la conjecture de Baum-Connes a été démontrée pour les groupes moyennables. Après 2000 l'étude des algèbres de von Neumann est révolutionnée par la construction de *"group measure spaces"*. On obtient les premiers exemples explicites d'algèbres de von Neumann ayant un invariant de Connes trivial et des exemples d'actions de groupes super-rigides. Dans le même temps, l'extension de l'approche « Dirac-Dirac dual » des espaces de Hilbert aux espaces de Banach a permis de prouver la conjecture de Baum-Connes pour les groupes hyperboliques.

Les thématiques suivantes vont peut-être bouleverser le domaine dans la prochaine décennie.

- Les groupes quantiques discrets ont été introduits et classifiés. Un analogue de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes quantiques libres a été démontré.
- La théorie des groupoïdes se développe comme solution au calcul pseudo-différentiel sur les variétés singulières et mène à une bonne formulation, en termes de C*-algèbres, des théorèmes de l'indice.
- La structure de la C*-algèbre réduite d'un groupe de Lie, dont seule la K-théorie est connue par la conjecture de Baum-Connes, le calcul même de la K-théorie pour la C*-algèbre pleine (encodant toutes les représentations unitaires) sont des problèmes qui commencent à être attaqués.
- Il y a une intense activité dans l'interface avec la théorie des nombres. Il s'agit entre autres d'associer à tout corps de nombres un système dynamique ayant de bonnes propriétés en rapport avec l'arithmétique du corps (on veut notamment réaliser sa fonction zêta de Dedekind comme la fonction de partition du système dynamique).

5. Topologie algébrique et géométrique

Topologie algébrique. Certaines thématiques sont maintenant bien établies (homotopie instable, homotopie rationnelle, opérades, etc.). D'autres sont nouvelles. Citons-en quelques-unes en développement.

Théorie des groupes p-locaux. Ce sujet, issu de la théorie d'homotopie des espaces classifiants de groupes *p*-locaux, est à l'interface avec la théorie des groupes finis, en particulier des systèmes de fusion.

Homotopie motivique. L'application de la théorie d'homotopie en géométrie algébrique a été déterminante dans la résolution récente de la conjecture de Bloch-Kato. Une convergence des sujets de recherche des topologues et des géomètres algébristes (par exemple sur les opérations instables et stables sur le cobordisme algébrique) mènera certainement à de nouveaux résultats fondamentaux.

Théorie d'homotopie stable. La filtration des tranches, introduite par Voevodsky en théorie motivique, a inspiré les récents travaux remarquables sur le problème de l'invariant de Kervaire. Ceci est un bel exemple d'une application de méthodes nouvelles à un problème classique, ici l'utilisation de méthodes équivariantes pour établir un résultat profond résolument non équivariant.

Géométrie dérivée. De nouvelles techniques ont permis la construction de nouvelles théories cohomologiques, dont les formes modulaires topologiques et les formes automorphes topologiques, renforçant ainsi les liens entre l'arithmétique et la topologie. La recherche d'une interprétation géométrique de ces théories fait intervenir les catégories supérieures et la théorie des champs, témoins de l'influence d'idées provenant de la physique théorique.

*Catégories supérieures et infini-catégories. C*e sujet est devenu incontournable. Par exemple, les travaux de Lurie sur l'hypothèse du cobordisme de Baez et Dolan utilisent les catégories supérieures en développant la théorie des champs étendus, à partir des méthodes développées pour démontrer la conjecture de Mumford.

Topologie chirale et théorie de la renormalisation. Ce sont de nouvelles thématiques provenant de la physique théorique et développées récemment par Lurie et Costello.

Informatique théorique. Il est désormais acquis que les méthodes de l'homotopie abstraite ou de la topologie algébrique dirigée ont des applications importantes en informatique théorique (voir aussi la partie IV.3.2).

Topologie de basse dimension. Ces dernières années, la topologie de dimension trois a été le témoin d'avancées spectaculaires. La première qui vient à l'esprit est évidemment la résolution de la conjecture de Poincaré et de la conjecture de géométrisation de Thurston par la méthode du flot de Ricci. Les outils introduits pour résoudre ces conjectures ont suscité une énorme activité et permis de démontrer d'autres résultats fondamentaux comme la classification différentiable des variétés à opérateur de courbure positif ou à courbure sectionnelle 1/4-pincée et la classification des variétés compactes de dimension 4 à courbure isotropique positive. Citons aussi la solution de la conjecture sous-groupes de surfaces et de la conjecture d'Ehrenpreis, et le fait que toute variété asphérique de dimension 3 est virtuellement Haken et donc toute variété hyperbolique fermée est finiment revêtue par un fibré.

Dans un autre registre, plus géométrique, il y a eu la quantification des espaces de modules et l'étude des espaces de représentations Anosov, les orbites fermées dans les espaces homogènes. Finalement on sait maintenant qu'on peut calculer le genre d'un nœud en utilisant l'homologie de Heegaard-Floer, qui admet aujourd'hui une version entièrement combinatoire, et donc on peut détecter le nœud trivial par le calcul d'un invariant numérique explicite. Ces résultats d'une grande profondeur vont redessiner la carte de la géométrie et la topologie en petite dimension.

L'avenir de la topologie géométrique à plus long terme réside, probablement, dans l'étude des variétés différentielles de dimension quatre, où l'on ne dispose même pas de bonnes conjectures. Les grandes avancées dans ce domaine ont été inspirées par la physique quantique et les résultats sont le fruit d'une multitude de techniques de nature géométrique, analytique, algébrique et topologique. A court et moyen termes, l'étude des espaces de modules de représentations et de leur quantification, des points de vue géométrique, topologique et dynamique, représente une des voies pour approcher les questions fondamentales de la dimension quatre. Une question ouverte toujours d'actualité est la conjecture du volume en dimension trois et plus généralement l'interaction entre l'analyse semi-classique et la géométrie. La géométrie symplectique et la topologie de contact restent des domaines en pleine effervescence.

6. Géométrie

Analyse sur les variétés. Outre la résolution mentionnée plus haut des conjectures de Poincaré et de Thurston, il y a eu d'autres avancées importantes comme la solution d'une conjecture de Gromov sur le groupe fondamental des variétés à courbure de Ricci minorée et celle de la conjecture de Donaldson-Tian-Yau sur l'existence de métriques Kähler-Einstein sur les variétés de Fano. Présentons quelques perspectives.

Variétés ouvertes de dimension trois. Elles peuvent avoir des topologies assez sauvages, comme dans le cas des variétés de Whitehead qui sont contractiles, mais non difféomorphes à $\mathbf{R}^3$. Néanmoins au vu des succès obtenu par le flot de Ricci en dimension trois, il est tentant d'examiner les « meilleures » géométries possibles sur les 3-variétés ouvertes.

Courbure isotropique positive. On sait qu'une variété compacte simplement connexe à courbure isotropique strictement positive est homéomorphe à une sphère. Une conjecture de Schoen demande si une variété compacte à courbure isotropique strictement positive est une somme connexe de variétés dont un revêtement fini est difféomorphe à une sphère ou au produit d'un cercle et d'une sphère. Cette conjecture a été confirmée en dimension 4. Mais le cas de la dimension supérieure reste ouvert.

Variétés d'Einstein et au delà. Certaines questions de base restent sans réponse. Par exemple, est-il vrai que toute variété compacte de dimension supérieure à 5 porte une métrique d'Einstein ? Nous ignorons aujourd'hui la réponse à cette question. Si la réponse est négative, nous devons alors chercher d'autres candidats pour être la meilleure métrique sur une variété compacte. Une famille de candidats possibles est formée par les métriques à courbure harmonique. Il sera alors important de déterminer les propriétés de régularité à la Cheeger-Colding-Tian pour les espaces obtenus comme limite de variétés à courbure harmonique. Des travaux de Tian-Viaclovsky ont déjà permis l'étude de la dimension 4. Le premier obstacle à une telle étude est l'absence de quantités monotones permettant des résultats de rigidité à la Bishop-Gromov. Néanmoins, il est permis d'être optimiste puisqu'avant les travaux de Perelman on déplorait la même absence pour le flot de Ricci.

Pour terminer, concentrons-nous sur les métriques d'Einstein à courbure scalaire nulle. Les seuls exemples connus de variétés compactes portant une telle métrique ont une holonomie spéciale. Concernant les métriques à holonomie G_2 (en dimension 7) et $Spin_7$ (en dimension 8), nous ne savons pas s'il y a un nombre fini de variétés portant une telle métrique. Il est possible que les travaux de Chen-Donaldson-Sun à propos du problème de Calabi-Yau sur les variétés de Fano apportent des outils permettant d'approfondir notre compréhension des variétés à holonomie spéciale. Un autre espoir pour étudier la topologie des variétés à holonomie spéciale est le développement d'une théorie de jauge en dimension supérieure.

Théorie géométrique des groupes. Cette théorie a émergé de la topologie différentielle lorsqu'il est apparu que le groupe fondamental concentrait les obstructions aux techniques de chirurgie en grande dimension et que sa géométrie à grande échelle dominait la topologie en basse dimension. Cette veine se poursuit : des avancées significatives ont eu lieu sur les problèmes hérités des années 1960 et 1970 (conjectures de Borel, Novikov, Baum-Connes). Elles ont mis encore davantage en lumière les propriétés du groupe fondamental en tant qu'espace métrique. Il en est de même en dimension 3 : la résolution de la conjecture de Waldhausen en dimension 3 est une belle réussite de la technique des actions de groupes sur des complexes cubiques CAT(0). En dimension 2, la théorie de Teichmüller a pris de nouvelles directions (géométrie des groupes de difféotopies de surfaces et d'automorphismes extérieurs du groupe libre, théories de Teichmüller d'ordre supérieur) où topologie, géométrie à grande échelle, systèmes dynamiques rejoignent la géométrie algébrique, la géométrie tropicale et même la physique.

Les groupes finis ont aussi une géométrie asymptotique quand on les considère en famille. Les propriétés de trou spectral et d'expansion dans la famille des groupes finis simples sont maintenant mieux comprises ; la théorie additive des nombres y joue un rôle inattendu. L'expansion est liée à la plongeabilité dans les espaces de Banach et aux propriétés de points fixes (propriété T et ses renforcements). Ces questions activement étudiées suscitent de l'intérêt du côté de l'informatique théorique, qui y voit un peu plus qu'une source d'exemples.

Marcher au hasard sur un groupe semble un moyen sûr d'en détecter les propriétés à grande échelle. C'est ainsi qu'en étudiant les frontières de Poisson possibles, on est arrivé à une meilleure compréhension de familles d'exemples de groupes à croissance intermédiaire, de leurs propriétés de croissance et isopérimétriques. La percolation sur un groupe est un procédé d'obtention de graphes aléatoires. Si le cas des groupes abéliens a été abondamment étudié, l'étude d'autres groupes ouvre un champ neuf dont il est difficile de cerner les contours tant ils sont vastes.

L'influence de la théorie ergodique en théorie des groupes ne cesse de s'étendre : certains groupes sont trahis par leurs actions sur des espaces de probabilités. La notion d'équivalence mesurable de groupes s'avère d'une richesse inattendue. Elle est reliée au problème classique d'équivalence des algèbres de von Neumann associées aux actions, sur lequel d'importants progrès ont été accomplis. La théorie ergodique suggère des formes nouvelles d'approximation d'un groupe par des groupes finis et permet de définir l'entropie pour les actions de groupes dits sofiques, classe tellement vaste qu'on ne connaît aucun groupe qui n'y soit pas. La dynamique symbolique nous fournit une nouvelle source d'exemples et de contre-exemples, les groupes complets topologiques. L'action d'un groupe sur lui-même et ses probabilités invariantes, vues comme généralisations des sous-groupes distingués, sont des outils précieux dans l'étude des tours de sous-groupes d'indice fini. Enfin, les progrès spectaculaires obtenus dans l'étude plus classique des actions de réseaux sur des espaces homogènes de mesure finie laissent espérer de nombreux développements et des retombées en théorie des nombres.

En conclusion, si le cœur du sujet, proche de la topologie, atteint progressivement une certaine maturité, c'est la multiplication des interfaces avec d'autres domaines (algèbres d'opérateurs, arithmétique, géométrie algébrique, géométrie des espaces de Banach, probabilités, systèmes dynamiques) qui atteste de la vitalité d'un sujet qui existait à peine il y a trente ans.

Singularités. La théorie des singularités comprend à la fois des aspects algébriques, topologiques, géométriques et analytiques notamment du côté des champs de vecteurs et des systèmes différentiels. Les chercheurs français sont présents depuis très longtemps dans ces thématiques ainsi que dans les perspectives d'interactions entre les avancées théoriques et les applications concrètes par exemple en robotique et algorithmique.

Un développement récent concerne l'étude de *trajectoires des champs de vecteurs* et plus généralement l'étude qualitative des solutions des équations différentielles ordinaires par des méthodes géométriques. Cette nouvelle piste a été rendue possible d'une part par les progrès de la théorie des modèles, d'autre part par des avancées récentes comme la preuve de la conjecture du gradient de Thom, la résolution des champs de vecteurs analytiques réels en dimension 3 et la résolution des singularités des classes quasi-analytiques. A court terme on pense à la structure géométrique des ensembles décrits par fonctions quasi-analytiques. A plus long terme, on sera confronté à l'étude de phénomènes transcendants et des perspectives comportant des aspects arithmétiques.

En *géométrie énumérative et algorithmique*, les aspects nouveaux sont la géométrie tropicale et le développement d'algorithmes rapides en temps polynomial. Un autre sujet classique, fortement lié à la théorie des singularités réelles, est la robotique. Les méthodes géométriques les plus abstraites y donnent les meilleurs algorithmes. Parmi les perspectives, citons les algorithmes en temps polynomial par exemple pour les stratifications, les aspects algorithmiques de la résolution des singularités, et l'introduction d'algorithmes basés sur la géométrie tropicale.

Les méthodes *motiviques*, provenant de l’étude des espaces d'arcs et de la résolution des singularités, ont été utilisées pour avancer la classification de germes de fonctions analytiques réelles. L’intégration motivique sur les ensembles définissables a ouvert de nouvelles pistes fascinantes, la géométrie métrique *p*-adique ou plus généralement la géométrie métrique non archimédienne (espaces de Berkovich). Récemment, une nouvelle construction plus géométrique de la fibre de Milnor motivique, basée sur la géométrie non archimédienne, a été donnée ; elle semble bien adaptée à l’étude des singularités.

Les interactions entre l'étude des singularités complexes et la *topologie de basse dimension* ont ouvert de nouvelles perspectives de recherche. Le but est de relier les invariants analytiques de la singularité avec la topologie de son entrelacs, ou avec la combinatoire du graphe de résolution. Il existe déjà de nombreux exemples non triviaux, comme le genre géométrique en liaison avec les invariants de Seiberg-Witten de l'entrelacs, les séries de Poincaré multivariables et la fonction zêta de type Weil, les fibres de Milnor et le remplissage de Stein des variétés munies de structures de contact.

Les méthodes différentielles sont des *méthodes transcendantes* qui permettent d’analyser les déformations des singularités ou, plus généralement, leurs espaces de modules. D’autre part, les singularités irrégulières de certaines équations différentielles linéaires complexes font apparaître un phénomène de Stokes dont la géométrie sous-jacente est à l’intersection de la théorie des singularités réelles et complexes. Dans nombre de ces questions, la théorie de Hodge joue un rôle important, d’où l’intérêt et l’importance de la faire apparaître dans des domaines où elle n’existe pas naturellement. Elle intervient de plus en plus dans la mise en évidence de structures de Frobenius ou de structures harmoniques sur les espaces de déformations apparaissant par symétrie miroir de la cohomologie quantique des variétés projectives lisses complexes.

7. Analyse et systèmes dynamiques

Analyse complexe et géométrie analytique. Ces domaines se situent au carrefour de nombreuses autres branches des mathématiques : géométrie algébrique, théorie analytique des nombres, analyse globale sur les variétés, systèmes dynamiques. La dernière décennie a donné lieu à des avancées remarquables, et on peut donc espérer sur cette lancée un riche éventail de nouveaux résultats dans les années à venir.

Citons quelques développements récents. Autour des *équations de Monge-Ampère complexes* et l'analyse de leurs singularités, la preuve récente de la conjecture de Yau-Tian utilise des solutions à singularités coniques de l'équation de Monge-Ampère pour déduire une condition nécessaire et suffisante d'existence de métriques Kähler-Einstein sur les variétés de Fano. Des progrès significatifs ont été réalisés dans la compréhension des *singularités plurisousharmoniques*. Très récemment il y a eu la résolution de la conjecture dite d'ouverture de Demailly-Kollár qui stipule un résultat très attendu de semi-continuité pour les faisceaux d'idéaux multiplicateurs. En *géométrie kählérienne*, des théorèmes de structures nouveaux ont été établis, aussi bien en ce qui concerne la géométrie et le groupe fondamental de ces variétés que les propriétés de positivité des feuilletages. Dans le domaine des *systèmes dynamiques complexes à plusieurs variables*, des résultats ont été obtenus sur les entropies, l'hyperbolicité (exposants de Lyapunov non nuls), l'équidistribution des points et des variétés, les propriétés ergodiques. L'étude des transformations rationnelles a fortement progressé en dimension 2 et a mené à des résultats profonds sur le groupe de Cremona.

Malgré ces avancées, de nombreuses questions fondamentales restent à résoudre. Un problème majeur non résolu est la *conjecture d'abondance*. Le lien entre la *théorie du modèle minima*l et l'étude du *flot du Kähler-Ricci* reste à explorer : il s'agit d'un programme posé vers 2008 par Tian et Song dont quelques étapes préliminaires ont été franchies, mais on peut espérer que les progrès dans la technologie des équations de Monge-Ampère permettront d'avancer plus loin.

Le champ très vaste de la *classification des variétés algébriques ou kählériennes* continuera à coup sûr à faire l'objet de grands efforts. La structure des variétés hyperkählériennes est un enjeu très important, avec par exemple la question de l'existence de fibrations en tores lagrangiens au-dessus de l'espace projectif pour les variétés qui possèdent un fibré linéaire nef d'auto-intersection nulle. Le champ encore plus mystérieux des variétés non kählériennes est lui aussi grand ouvert compte tenu des techniques nouvelles apparues en théorie des déformations ou dans les théories cohomologiques.

Du côté de l'étude des variétés algébriques hyperboliques, on peut espérer des avancées vers la *conjecture de Green-Griffiths*, notamment en liaison avec l'étude des feuilletages holomorphes, de leurs singularités et de leurs propriétés de positivité. Grâce aux travaux de Lang, Vojta et McQuillan, on soupçonne que ces questions sont liées de façon très profonde à l'analyse des équations diophantiennes.

Analyse harmonique. C'est à l'origine l'étude des signaux de nature périodique tel le signal musical ou celle de la diffusion de la chaleur. De nos jours l'idée-clef reste toujours la même : décomposer les fonctions et les opérateurs en composantes élémentaires. Une des plus belles illustrations de cette idée, il y a déjà trente ans, a été la naissance de la *théorie des ondelettes*. Les ondelettes sont devenues un outil incontournable dans toutes les opérations liées au traitement du signal de l'image et de la vidéo (codage, transmission, débruitage, reconstruction d'images floues,...). Les ondelettes trouvent leur origine dans les travaux de Grossmann et Morlet motivés par la prospection pétrolière ; elles sont aussi issues des travaux de Calderón sur les opérateurs d'intégrale singulière qui restent encore aujourd'hui un thème central d'étude et d'application de l'analyse harmonique moderne. En statistique elles fournissent des décompositions adaptables à beaucoup de situations et sont numériquement stables.

Voici quelques résultats-clefs de ces dernières années et quelques perspectives.

- Résolution des conjectures de Vitushkin et Painlevé sur l'élimination des singularités des fonctions analytiques bornées en dehors d'un compact.
- Résolution de la conjecture de Kato, motivée par des applications aux dérivées partielles, sur la détermination du domaine des racines carrées d'opérateurs différentiels accrétifs.
- Résolution de la conjecture A2 qui donne la meilleure borne dans des inégalités à poids d'intégrales singulières, motivées par des applications à la géométrie des applications quasi-conformes.

Au-delà de la réponse à certains problèmes, les solutions ci-dessus ont apporté et apportent des méthodes et idées nouvelles. Citons le développement systématique en cours de l'analyse harmonique dans les espaces métriques munis d'une mesure non doublante ; on a longtemps cru que le bon cadre était celui des mesures doublantes. C'est le retour en force des méthodes de martingales grâce à la construction et l'utilisation de systèmes aléatoires de « cubes dyadiques » qui permettent des avancées notables (et même une relecture lumineuse de vieux résultats). Citons aussi les développements en cours pour les problèmes aux limites pour des opérateurs elliptiques dans des conditions minimales de régularité du bord (ensembles Ahlfors-réguliers) et de régularité des coefficients.

De vieux problèmes non résolus continuent à recevoir les assauts des méthodes d’analyse harmonique. Un exemple typique est la conjecture de Kakeya en théorie géométrique de la mesure. Le problème et ses variantes font intervenir des fonctions maximales et des intégrales oscillantes. Les meilleurs résultats sont obtenus en combinant l’analyse harmonique et la combinatoire issue de la théorie additive des nombres. Des variantes sur les corps finis (remplaçant le corps des réels) sont explorées dans l’espoir d’obtenir des nouvelles méthodes. Dans ce cadre, la conjecture a été récemment démontrée incorporant des méthodes de géométrie algébrique réelle.

D’autres résultats spectaculaires, comme le théorème de Green et Tao sur les progressions arithmétiques arbitrairement longues dans les nombres premiers, qui pourtant ont une densité nulle, mélangent des méthodes de théorie des nombres, de théorie ergodique et d’analyse harmonique. Elles exploitent une dichotomie entre structure et caractère aléatoire ou pseudo-aléatoire des ensembles en question. Cette direction est très active à l’échelle internationale.

Enfin, l’analyse harmonique reste toujours au contact des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, offrant des estimations et des cadres fonctionnels permettant la résolution de certaines équations. On pense aux équations de Navier-Stokes, aux équations dispersives avec l’usage des inégalités de Strichartz.

Systèmes dynamiques. Les systèmes dynamiques connaissent actuellement des avancées importantes, à l'interface des autres thématiques.

La *dynamique holomorphe* a laissé la place, ces dernières années, à de nouveaux développements de l'étude des transformations birationnelles, du groupe de Cremona. Aujourd'hui plus que jamais on voit se développer l'interaction avec des problèmes classiques de la géométrie algébrique, telle la conjecture jacobienne, et de la théorie géométrique des groupes.

Quant aux *systèmes dynamiques non discrets*, on peut mentionner quelques problèmes ouverts importants et d'actualité comme celui de l'existence de minimaux exceptionnels pour les feuilletages du plan projectif complexe, les problèmes d'hyperbolicité à la Kobayashi, problème de Green-Griffiths faisant aussi intervenir les feuilletages. D'un point de vue plus arithmétique, la conjecture de Katz-Grothendieck possède aujourd'hui ses versions non linéaires. Sans aucun doute, ces différents problèmes vont se nourrir les uns les autres et seront le cadre de nouvelles interactions entre géométrie diophantienne et systèmes dynamiques. Il est aussi vraisemblable que les feuilletages jouent un rôle dans le programme de Mori après les travaux de McQuillan sur la classification "à la Enriques" des surfaces feuilletées.

Concernant les *équations différentielles ordinaires*, rappelons que le 16e problème de Hilbert reste essentiellement ouvert, même si des avancées profondes ont récemment vu le jour pour la version infinitésimale. On s'attend à des développements à la frontière de la géométrie arithmétique, suite aux avancées récentes de Kedlaya et Mochizuki sur l'étude des *D*-modules holonomes.

Cette dernière décennie a aussi été marquée par l'émergence de la dynamique dans les espaces de modules et plus particulièrement celle du *flot de Teichmüller*, lié aux billards rationnels et aux échanges d'intervalles. Parmi les problèmes actuellement étudiés figurent la classification des sous-variétés invariantes et l'étude de leurs exposants de Lyapunov. Plus généralement, un sujet prometteur concerne la dynamique dans les espaces homogènes et la classification des mesures invariantes et stationnaires par des méthodes dynamiques, géométriques et probabilistes. Les résultats importants obtenus ont déjà des applications pour d'autres champs des systèmes dynamiques.

La *dynamique hamiltonienne* se développe autour des problèmes de diffusion d'Arnold et grâce à de nouveaux outils comme la théorie KAM faible. Nous observons également un rapprochement entre la dynamique topologique et la géométrie symplectique (ceci pourrait conduire par exemple à une interprétation dynamique des invariants spectraux). Les systèmes dynamiques sont à présent largement exportés aux systèmes de dimension infinie et à l'étude des équations aux dérivées partielles (phénomènes de petits diviseurs, formes normales,…). La dynamique des cocycles linéaires (réductibilité, hyperbolicité non uniforme,...) qui se retrouve dans nombre de travaux récents permet d'aborder l'étude de l'opérateur de Schrödinger quasi-périodique sous un nouvel angle.

L'étude des *systèmes dynamiques non uniformément hyperboliques* se concentre ces dernières années vers les systèmes partiellement hyperboliques qui représentent encore un champ d'investigation important (classification, description des mesures d'équilibre, codage,...). Par ailleurs, grâce aux nouveaux outils perturbatifs, nous espérons des classifications de l'espace des systèmes différentiables (propriétés d'hyperbolicité et de décomposition de la dynamique,...).

Pour ce qui concerne la *théorie ergodique*, les résultats récents en liaison avec la combinatoire additive et la dynamique symbolique donneront certainement lieu à de nouveaux développements fructueux.

Pour terminer cette partie consacrée à l'analyse, notons que, si les lois de la physique mathématique sont écrites dans le langage des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles, l'analyse mathématique aborde aujourd'hui des domaines moins structurés où les lois sont absentes et où il convient de traiter des masses de données en apparence incohérentes. Une nouvelle analyse mathématique est nécessaire pour maîtriser des domaines aussi variés que le changement climatique, la génomique, la médecine computationelle, la recherche sécuritaire à l'intérieur des données du web, etc. Les problèmes posés par le changement climatique sont particulièrement ardus.

8. Équations aux dérivées partielles

Les lois de l'Univers sont décrites par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles (EDP). L'étude des EDP est donc un sujet historique reliant mathématique et physique, mais les équations aux dérivées partielles interviennent également dans d'autres interfaces.

Dans la classe des *équations paraboliques*, les lignes de force sont d'un côté les équations dégénérées et de l'autre les équations paraboliques sous forme non divergentielle, souvent en rapport avec la théorie de l'homogénéisation et celle du contrôle stochastique (et, donc, en arrière-plan, une bonne part des mathématiques de la finance et du risque ainsi que celles de la mécanique et de la biologie).

Du côté des *équations hyperboliques*, l'activité en équations d'ondes non linéaires, avec en particulier les équations d'Einstein, est en plein essor portant souvent sur des questions d'intérêt physique (stabilité des trous noirs, espaces de Kerr, etc.) avec de fortes connexions avec la géométrie, en particulier riemannienne. De façon générale, les questions de physique et de mécanique (mécanique quantique, mécanique statistique, théorie cinétique des gaz et mécanique des milieux continus) ne cessent d'inspirer des travaux de premier plan en EDP. On peut s'attendre à des progrès significatifs en ce qui concerne, notamment, la justification de modèles de champ moyen en mécanique quantique, la dérivation rigoureuse de l'équation de Boltzmann sur des échelles de temps réalistes, la justification de modèles de turbulence faible, ainsi que les propriétés qualitatives des équations de la mécanique des fluides.

Un domaine voisin qui continue de progresser à grands pas est l'analyse des *équations dispersives non linéaires* (Schrödinger, Korteweg-de-Vries, ou encore *"wave maps"*), qui s'est développée dans la période récente en se dégageant des méthodes d'intégrabilité. L'analyse des « profils d'explosion » lorsque les solutions deviennent singulières recourt de plus en plus à des méthodes de systèmes dynamiques, mais on pressent un retour en grâce des méthodes d'intégrabilité au côté des méthodes d'énergie.

L'analyse des *EDP elliptiques et paraboliques* issues de la géométrie (flots de Ricci, mouvements par courbure moyenne, équations de contrainte de la relativité générale, équations de Monge-Ampère réelle et complexe) est très active et on peut augurer une intensification de l'interaction entre géomètres et analystes dans ces domaines, la récente résolution de la conjecture de Poincaré à l'aide de méthodes d'EDP géométriques n'étant pas la moindre des motivations.

A la frontière de ce domaine, autour du calcul des variations, se développe une forte activité dans la foulée de récentes résolutions de conjectures (celle de De Giorgi et celle de Willmore, notamment) et on peut s'attendre à de nombreux autres résultats de « rigidité » ou d'unicité. Dans ce même domaine, l'utilisation des « méthodes d'intégration convexe » a conduit à un rapprochement spectaculaire entre des terrains mathématiques très éloignés en apparence : les EDP des fluides d'une part, les plongements isométriques d'autre part. On peut donc envisager des développements assez inattendus à cette interface originale entre mécanique et géométrie.

Au contact de l'analyse fonctionnelle, des probabilités et de la géométrie riemannienne, les méthodes de *transport optimal* ont eu un fort impact sur les EDP (notamment elliptiques et paraboliques) et on peut s'attendre à de nouvelles extensions de cette approche, notamment aux équations hyperboliques ou dispersives.

Traditionnellement, l'activité en EDP est très forte du côté des applications (physique, mécanique, ingénierie, calcul scientifique, contrôle et automatique, biologie, finance, etc.) et il n'y a aucune raison de s'attendre à un quelconque tarissement de ce côté là, en particulier dans le secteur particulièrement actif de la biologie, avec, comme d'habitude, une forte rétroaction sur le cœur du domaine par l'apport de nouvelles questions fondamentales et de nouvelles méthodologies.

Enfin, un apport récent des probabilités aux EDP vient de la théorie des *"rough paths"* avec l'émergence de méthodes radicalement nouvelles (notamment dans l'étude de certains types d'EDP stochastiques) dont il est encore difficile de mesurer l'impact futur sur le cœur du domaine.

9. Probabilités et statistique

Probabilités. En probabilités et physique statistique, la dernière décennie a été l'occasion de développements de premier plan à travers des travaux couronnés notamment par les médailles Fields de Werner et Smirnov. La combinatoire et les propriétés d'invariance conforme de modèles de la physique statistique (marches auto-évitantes, polymères, percolation,...), et l'analyse de leur limite continue normalisée à travers la *"Schramm-Loewner Evolution"* (SLE) a en effet ouvert un champ immense d'investigation avec des conjectures formidables pour l'avenir, qui continueront à créer des ponts entre probabilités, analyse complexe et physique théorique. Parmi les avancées de ces dernières années autour des modèles critiques et invariants conformes bidimensionnels, on peut citer la détermination exacte de paramètres critiques pour certains modèles sur certains réseaux (Potts, marches auto-évitantes, etc.), la compréhension du lien étroit entre les objets de type géométrique que l'on peut détecter dans un champ libre gaussien, et le lien avec les modèles de boucles de SLE (*"conformal loop ensembles"*), des preuves nouvelles et des résultats nouveaux concernant les propriétés même des processus SLE (réversibilité, paramétrisation géométrique naturelle de la courbe), la caractérisation des SLE en tant que soudure conforme (*"welding")* .

Dans le même spectre, des études fécondes sur les graphes et cartes planaires aléatoires (avec pour objet continu universel la carte brownienne) sont en plein développement, en lien avec de multiples travaux autour des modèles de mécanique statistique, comme la percolation, sur des réseaux aléatoires infinis. Les cartes planaires, qui sont des graphes dessinés sur la sphère de dimension 2 et vus à déformation continue près, sont des objets importants en combinatoire et en géométrie. Elles constituent en effet un modèle canonique de géométrie aléatoire en lien notamment avec la théorie de la gravité quantique en dimension deux, ainsi que de nombreux thèmes analytiques, combinatoires et topologiques. Les cartes planaires ont ainsi suscité des interactions très fructueuses entre mathématiciens spécialistes des probabilités ou de la combinatoire et physiciens théoriciens. Il reste de nombreux problèmes ouverts importants, concernant en particulier les relations entre la carte brownienne et le champ libre gaussien, ou les processus SLE, sur lesquels plusieurs groupes de recherche travaillent activement, notamment en France et aux Etats-Unis.

Un autre thème très fructueux ces dernières années a été celui des matrices aléatoires, qui apparaissent dans de nombreux domaines. Leur rôle en complexité algorithmique et apprentissage statistique, systèmes intégrables, probabilités et statistiques, combinatoire et théorie des représentations, probabilités libres en font un sujet aux facettes riches et multiples. Les conjectures sur l'équation de Schrödinger aléatoire sur la base du modèle matriciel par Erdös et Yau forment un thème d'activités de premier plan.

Communes aux thèmes précédents, les influences et la *"noise sensitivity"* (initiée par Schramm) de modèles de percolation et de mécanique statistique ouvrent des perspectives très riches dans une interface entre mathématique discrète (analyse de fonctions booléennes) et informatique théorique (assez peu développée en France). Ces questions sont aussi directement liées à l'analyse géométrique convexe (comme la conjecture de Kannan-Lovasz-Simonovits et celle de l'hyperplan, issues de questions algorithmiques dans le calcul de volume d'ensembles convexes). Les limites de graphes de Lovasz, l'analyse de structures métriques par Naor et ses collaborateurs sont d'autres témoins du rôle de plus en plus significatif de l'analyse discrète en géométrie, théorie de approximation, apprentissage et complexité computationnelle. Des questions de complexité en informatique théorique se trouvent en effet liées, de façon inattendue et féconde, à des conjectures en géométrie (euclidienne, sphérique ou hyperbolique, souvent de grande dimension).

Dans une autre direction, la théorie du transport optimal a jeté les bases d'interactions très fructueuses entre analyse (EDP), géométrie et probabilités. Les orientations plus récentes dans ce cadre explorent la géométrie du transport optimal et ouvrent quelques perspectives nouvelles et inattendues du point de vue de la géométrie riemannienne classique, mais aussi pour des structures discrètes (graphes, modèles markoviens,...). Parallèlement, les ouvertures récentes de Hairer sur les EDP stochastiques et une nouvelle théorie de la régularité (basée sur les *"rough paths"* de Lyons) permettent de commencer à appréhender les solutions de modèles de la physique mathématique (équation de Kardar-Parisi-Zhang, champ libre gaussien, percolation).

Les probabilités ont un rôle crucial dans les interactions des mathématiques avec de nombreux autres domaines, la physique bien sûr, mais aussi les sciences du vivant, comme on le verra dans la partie IV.4 de ce rapport. Les marches aléatoires branchantes et les mouvements browniens branchants permettent l'étude de généalogies, et sont liés au chaos multiplicatif gaussien. Les dynamiques markoviennes (comme les systèmes de particules avec des interactions de type champ moyen ou fortes) et leurs études à différentes échelles spatio-temporelles sont utiles en mécanique statistique à l'équilibre et hors équilibre, ou pour des modèles d'écologie et de dynamique des populations. Les matrices aléatoires sont utilisées en télécommunications et en neurosciences. La géométrie stochastique est utilisée en imagerie. Sans oublier la théorie des processus, centrale dans les mathématiques financières comme on le verra plus loin (V.2).

En conclusion, alors que l'analyse reste l'outil privilégié pour modéliser les asymptotiques (comme dans l'exemple de SLE pour les modèles de percolation de la mécanique statistique), il est frappant de constater combien les mathématiques discrètes, la géométrie (des graphes, mais aussi continue) et la combinatoire prennent une part de plus en plus prépondérante dans des développements de premier plan ouverts vers un large spectre de champs mathématiques, jusqu'à l'informatique théorique et les questions de complexité.

Statistique. L'évolution actuelle de la discipline est fortement influencée par le développement de l'informatique, aussi bien en termes de moyens de calcul ou de capacité mémoire des ordinateurs qu'en termes d'avancées dans le domaine de l'algorithmique, de la théorie de l'information ou du codage. Les nouvelles capacités de recueil et de stockage des données provoquent une véritable avalanche de données dont le gigantisme rend obsolète l'emploi des outils d'analyse des données traditionnels, et dont le traitement requiert de nouvelles compétences pour les statisticiens. Ceci est vrai dans plusieurs domaines d'applications, en génomique tout autant qu'en économie ou en traitement du signal ou de l'image. Dans le même temps les outils de calculs de plus en plus puissants et performants stimulent l'imagination car ils permettent de mettre en œuvre des stratégies d'inférence toujours plus sophistiquées, dont l'utilisation aurait été impensable, voire absurde au siècle dernier.

Les thématiques statistiques liées à l'analyse des données de grande dimension se développent de façon rapide au sein d'équipes de recherche qui sont hébergées tantôt par des laboratoires de mathématiques, tantôt par des laboratoires d'informatique ou les équipes INRIA, et dont les leaders sont fort heureusement visibles dans les deux disciplines. Ces dix dernières années ont ainsi vu l'émergence d'une communauté *"machine learning"* (traduite imparfaitement en français par « apprentissage statistique »), à l'interface donc entre statistique et informatique.

Classer des données en grande dimension, analyser des données massives et souvent hétérogènes (*"big data"*), bâtir des prévisions à partir de données fonctionnelles, analyser des données structurées en grands réseaux : voici autant de défis auxquels les statisticiens seront confrontés dans les années à venir. Dans le même temps, l'enracinement mathématique de la statistique reste plus fructueux et plus varié que jamais. Ceci est non seulement vrai au travers du lien historique avec le calcul des probabilités, mais aussi *via* la théorie de l'approximation et l'optimisation, ces deux derniers domaines étant eux aussi exposés à la révolution de la grande dimension. Ainsi les méthodes dites de *"compressed sensing"* promues par Candès et Tao possèdent-elles une résonance à la fois en théorie de l'approximation en grande dimension et en théorie statistique du signal, tout en reposant fondamentalement sur des propriétés spectrales fines de grandes matrices aléatoires. Dans la même veine, les solutions efficaces pour sélectionner au sein d'un grand nombre de variables les plus influentes d'entre elles, reposent sur des critères d'optimisation convexe (algorithmes de type Lasso). De même encore, les procédures efficaces pour mettre en œuvre les solutions bayésiennes aux problèmes d'estimation sont basées sur des simulations intensives de type Monte Carlo (algorithmes MCMC) dont le succès dépend de propriétés fines de chaînes de Markov.

Enfin l'étude du phénomène de concentration de la mesure et le développement de techniques à la jonction entre probabilités, analyse et géométrie a donné lieu à une révolution profonde des outils mathématiques utilisés en statistique. C'est ainsi que les inégalités de concentration ont permis l'introduction de nouvelles approches des questions de choix de modèle, des progrès spectaculaires en statistique non paramétrique et une analyse mathématique de nombreux algorithmes d'apprentissage tels que le *"boosting"* dont les performances étaient jusqu'alors constatées, mais non prouvées.

Que ce soit pour la conception, l'expérimentation ou l'application des méthodes statistiques, la réflexion mathématique est aujourd'hui indissociable de la réflexion sur les algorithmes permettant son expression et sa mise en application. L'avenir de la discipline passe donc par le développement harmonieux et les échanges entre les trois grandes branches d'activité que sont la statistique mathématique, la statistique expérimentale (mauvaise traduction française de *"computational statistics"*) et le traitement de données.

Théorie des jeux. Les dernières années ont vu un développement important au niveau des concepts, des outils mis en œuvre et des domaines d'application de cette théorie qui étudie les situations d'interaction stratégique.

Concepts. Les avancées ont été significatives dans la théorie générale des jeux répétés à deux joueurs et à somme nulle. On voit l'émergence d'un modèle global de jeu dynamique comprenant des états stochastiques, une structure d'information incomplète sur l'état, des signaux sur les actions et un déroulement en temps continu. En spécifiant quand les actions sont prises (temps discret/continu), on décrit une gamme de modèles qui couvre les jeux répétés et les jeux différentiels. Dans les deux cadres on développe une approche asymptotique ou uniforme et les techniques s'enrichissent et se complètent mutuellement.

Dans le cas à *n* joueurs, l'étude des jeux répétés à information complète (*"supergames"*) avec signaux donne lieu a une recherche active concernant la caractérisation de l'ensemble des différents types d'équilibres (approche asymptotique générale/approche uniforme ; équilibre de Nash, parfait, public,...). Par ailleurs l'existence d'équilibre uniforme pour les jeux stochastiques à plus de deux joueurs est une question ouverte importante.

Les jeux d'interaction informationnelle reposent sur une étude fine de la dynamique et l'interaction des croyances : les résultats récents sont nombreux et le champ de questions ouvertes est très vaste (unicité d'équilibre, monotonicité, stratégies à seuil, …)

Un autre domaine concerne l'étude de la variété des équilibres et leur classification : on vise à clarifier le lien entre stabilité (topologique) et stabilité dynamique pour les attracteurs des dynamiques générées par des champs de Nash.

Enfin il faut citer le développement de la théorie des jeux à champ moyen et le lien avec l'étude des jeux non atomiques. En particulier les approximations par des jeux finis et l'étude *via* des procédures adaptatives sont des questions importantes ainsi que le lien avec le transport optimal.

Outils. L'étude asymptotique des valeurs de jeux répétés repose sur l'analyse de solutions de viscosité d'équations de Hamilton-Jacobi-Bellman avec des aspects spécifiques : contraintes de convexité, schémas discrétisés, espace d'état de dimension infinie. De même apparaissent naturellement des processus stochastiques de nature assez complexe. On note également le développement de liens entre jeux répétés et EDP (laplacien infini, jeux browniens). L'étude des propriétés asymptotiques de procédures adaptatives utilise des outils de systèmes dynamiques et d'approximation stochastique.

Applications. L'économie a été et reste un domaine important d'applications et une source d'idées nouvelles pour la théorie des jeux. Parmi les avancées récentes on peut noter tout le champ « économie de l'information » (et l'étude précise des procédures de communication) et le thème *"mechanism design"* (avec les applications aux procédures d'enchères ou à la gestion des réseaux sociaux).

Les liens avec l'informatique ont connu un développement considérable développé dans la partie IV.3.3. L'utilisation massive de concepts de théorie des jeux en biologie remonte aux années 1970-80, mais il y a eu récemment une explosion via l'étude de jeux d'évolution et le lien naturel avec les dynamiques de population : évolution des traits, persistance, attracteurs,… En particulier, des classes de jeux fondamentales sont apparues (jeux de potentiel, jeux dissipatifs,…) et les modèles de jeux issus de la biologie irriguent d'autres champs : comportement micro-économique et évolution globale en économie, ajustement local et congestion globale en théorie des réseaux.

10. Histoire des mathématiques

L'histoire des sciences mathématiques, un domaine où les chercheurs français ont traditionnellement occupé une position importante, a été substantiellement renouvelée ces dix à vingt dernières années.

L'étude des *mathématiques antérieures à 1600*, par l'édition et la traduction de nombreuses sources nouvelles et par des approches innovantes qui s'attachent à déceler les structurations et la nature des textes propres à chacune des cultures concernées. Ces études ont à la fois témoigné d'avancées insoupçonnées jusqu'alors dans ces mathématiques trop longtemps évaluées selon des normes inadaptées et permis de restituer l'insertion des mathématiques dans la société de leur temps et ses manières de penser et d'organiser l'information. Elles ont aussi contribué à une réflexion sur les aspects variés des textes mathématiques et de leur organisation.

L'étude des mathématiques dans leurs *interactions avec d'autres domaines du savoir*, que ce soit la peinture ou l'architecture à la Renaissance, les mathématiques de l'observatoire, les mathématiques de la balistique ou l'hydrodynamique du XVIIIe au XXe siècle. La très grande variété de ces interactions avant l'époque contemporaine met en évidence toute une gamme d'adaptations de résultats mathématiques à des cadres et pour des publics multiples, ajoutant une nouvelle dimension historique à notre compréhension des sciences mathématiques.

L'histoire des mathématiques entre 1750 et 1950 a aussi connu un renouvellement des approches, rendant compte en particulier des processus collectifs de l'élaboration des mathématiques, souvent avec l'aide de nouveaux outils numériques. Ces approches ont permis de mettre à jour une dynamique des savoirs mathématiques beaucoup plus riche que celle connue auparavant, et plus récemment, de réévaluer dans un contexte plus précis l'apport individuel de mathématiciens célèbres, que ce soit d'Alembert, Lamé, Galois, Hermite, Jordan ou Poincaré.

Ces innovations se sont accompagnées de vastes enquêtes sur de nouveaux sujets d'étude, comme la presse mathématique, les tables et les instruments mathématiques, ou les lieux variés où les mathématiques ont été élaborées.

Un autre aspect nouveau est le fait que, quelle que soit l'époque historique étudiée, les historiens des mathématiques ont élaboré de nouveaux moyens d'investigation, techniques d'édition ou outils dérivés des sciences humaines (linguistique, sémiologie, sociologie, histoire,…), souvent dans le cadre de collaborations nouvelles avec des spécialistes de ces différentes disciplines.

Dans les années à venir, la variété des mathématiques étudiées par les historiens sera probablement étendue et la richesse de leurs interactions avec les autres disciplines mise en valeur. Il faudra cerner ces interactions de manière plus raffinée, et donc renouveler les outils nécessaires à cela, en particulier du côté des « humanités numériques » (*"digital humanities"*). Du point de vue institutionnel, la question peut alors se poser d'une collaboration encore plus formalisée avec l'Institut des sciences humaines et sociales (INSHS) et l'Institut des sciences de l'information et de leurs interactions (INS2I). Certaines des nouvelles méthodes exigent en effet de traiter des textes en grand nombre, ou de suivre leurs modifications d'auteur en auteur, et de les manipuler de manière pertinente, d'où la nécessité d'appliquer des outils informatiques spécifiques.

Une attention particulière commence maintenant à être portée aux transferts de savoirs (transmission et réception) entre disciplines, entre mathématiciens et praticiens, entre pays et cultures. Analysés en détail, avec de nouvelles perspectives et techniques, ces transferts permettent typiquement de reconstituer des liens qui autrement passeraient inaperçus, par exemple, si l'on découvre l'origine « pure » dans une autre culture d'une pratique appliquée couramment dans une autre. Dans le même esprit, on se penchera sur le rapport souvent très délicat entre calcul et conceptualisation mathématique, surtout en présence d'une grande complexité des procédures de calcul, d'approximation, ou d'algorithmes.

Les grandes entreprises éditoriales, qui constituent un des grands services des historiens à la communauté mathématique, que ce soit celles de correspondances scientifiques, d'œuvres complètes ou de recueils thématiques (*"source books"*), se poursuivront avec les méthodes et les outils les plus récents.

11. Modélisation et calcul

Dans les grands défis technologiques il est souvent impossible et trop coûteux de tester un équipement avant sa fabrication. La modélisation mathématique et la simulation sur ordinateur sont donc devenues des piliers essentiels de la science et de l'ingénierie. Les mathématiques sont appelées à jouer un rôle de plus en plus important dans ce domaine : la rigueur mathématique permet d'assurer la précision et la fiabilité de ces simulations et les techniques mathématiques d'optimisation permettent d'améliorer l'équipement modélisé.

La modélisation est le procédé mathématique qui consiste à identifier dans un phénomène réel les caractéristiques les plus pertinentes, puis de représenter ce phénomène par un objet mathématique adapté (le modèle). Pour un même phénomène il existe en général plusieurs modélisations. Le modèle déduit peut-être plus ou moins complexe en fonction de la précision recherchée. Une image souvent employée est celle de « hiérarchie » de modèles. Pour une précision donnée, il est préférable de choisir le modèle mathématique le plus simple : c'est le principe du rasoir d'Occam. Les objets mathématiques qui peuvent servir de modèle sont d'une grande diversité : équation différentielles, équations aux dérivées partielles (EDP), mesures de probabilité, systèmes linéaires, fonctions à optimiser, graphes, variétés, *etc.* Il existe des exemples fameux où l'objet mathématique précède le modèle. C'est le cas de la géométrie riemannienne servant à la physique relativiste. Mais il existe aussi de nombreux exemples historiques où le besoin de modélisation a conduit à la construction de nouveaux objets mathématiques, par exemple la théorie des EDP ou la géométrie symplectique. Le mathématicien-modélisateur doit donc posséder une large culture mathématique et scientifique pour pouvoir modéliser des phénomènes variés.

Pour le développement de la modélisation mathématique, il faudrait mieux pouvoir décloisonner les disciplines. Il s'agit d'amener les chercheurs à trouver des applications concrètes à des objets mathématiques fondamentaux. Par ailleurs, il faut essayer de découvrir de nouveaux objets mathématiques dans des problèmes de modélisation issus d'autres domaines de la science. Les grands défis à venir de la modélisation mathématique se trouvent sans doute dans les sciences du vivant. En effet, la complexité des phénomènes biologiques nécessite l'invention de nouveaux objets mathématiques pour les décrire.

Analyse mathématique. Une fois le modèle construit, il faut étudier ses propriétés. A ce stade interviennent les spécialistes des objets mathématiques constituant le modèle, comme les EDP, les graphes ou encore la statistique ou les probabilités. Mais il est important, pour découvrir de nouvelles propriétés ou pour orienter les recherches, que des mathématiciens couvrant les besoins théoriques et de calcul travaillent ensemble avec des spécialistes du domaine modélisé.

Les modèles engendrent d'autres modèles : par des simplifications, des combinaisons, des transformations, des passages à la limite, il est possible de construire d'autres modèles à partir de modèles de base. La puissance des mathématiques joue ici un rôle considérable. Car si les modèles de base sont reconnus et validés, ces constructions permettent d'obtenir d'autres modèles tout aussi rigoureux. Voici quelques domaines de recherche récents qui vont très certainement se développer dans les années à venir :

- *Les techniques de réduction de modèles :* comment construire des modèles simplifiés à partir de modèles plus complexes tout en contrôlant la précision ?
- *Les méthodes asymptotiques, l'homogénéisation :* comment construire des modèles particuliers en passant à la limite sur certains paramètres d'un modèle plus général ?
- *L'adaptation de modèle :* comment à partir de plusieurs modèles d'une même réalité choisir le plus efficace en fonction de certains critères ?
- *La quantification d'incertitude :* comment estimer la propagation des incertitudes dans un modèle ?

Les solutions d'un modèle mathématique peuvent être très difficiles à calculer. Le plus souvent il faut en fournir une approximation sur ordinateur afin de conférer au modèle des propriétés prédictives. A ce stade interviennent le calcul scientifique et l'analyse numérique. Cette dernière consiste à contrôler rigoureusement l'écart entre le modèle mathématique et son approximation sur ordinateur. Il est crucial d'analyser mathématiquement l'approximation d'un modèle ainsi que les algorithmes qui permettent le passage sur ordinateur. Cette analyse permet d'assurer qu'un programme donnera des résultats avec une précision certifiée dans un temps imparti. Cet aspect est essentiel dans l'industrie, où les normes de qualité et de fiabilité sont de plus en plus contraignantes. Il est fondamental que les mathématiciens interviennent plus dans l'optimisation et la fiabilité des codes de calcul, car des améliorations, même minimes, peuvent avoir des effets considérables sur certains marchés, comme l'aéronautique. Il faut aussi que la communauté n'hésite plus à communiquer sur l'efficacité des mathématiques, même dans ses aspects les plus terre à terre : les mathématiques françaises ne sont pas seulement glorieuses, elles sont aussi lucratives !

Calcul scientifique et calcul haute performance (HPC). Le calcul scientifique consiste à mettre en œuvre, de la façon la plus efficace possible, les algorithmes de calcul sur ordinateur des solutions du modèle. La fameuse loi de Moore prédit un doublement de la capacité matérielle de calcul des ordinateurs tous les dix-huit mois. Cette loi empirique est vérifiée depuis plus de quarante ans. Si l'on tient aussi compte de l'amélioration des algorithmes mathématiques de calcul, on observe en fait un doublement de la puissance de calcul tous les huit mois seulement ! Aujourd'hui le calcul scientifique est partout : dans les téléphones portables pour traiter des images ou des vidéos, dans les voitures pour optimiser le freinage ou encore chez les architectes qui doivent prévoir la solidité des structures qu'ils dessinent. Certains calculs nécessitent peu de puissance et peuvent être réalisés sur un ordinateur personnel. Mais dans de nombreux domaines de la science, la réalisation d'une simulation impose l'usage d'un supercalculateur. Elle est alors souvent le travail d'équipes multidisciplinaires : mathématiciens, informaticiens, spécialistes du domaine modélisé.

Logiciels. Le calcul scientifique tend à s'attaquer à des problèmes de plus en plus complexes. Le mathématicien ne peut plus se contenter de créer des modèles et des algorithmes, il doit aussi connaître certaines techniques récentes de génie logiciel. Les codes sont souvent écrits par des équipes. Il faut mettre en place une bonne organisation et des procédures de vérification, se préoccuper des aspects juridiques (licence du logiciel). Il existe aussi un mouvement vers *l'open source* afin de tendre vers la science reproductible : toute publication scientifique sur les résultats d'un calcul devrait permettre au lecteur d'accéder à l'outil de calcul dans un but de vérification et de reproduction des résultats. D'autres aspects de conception sont abordés, comme les DSL (*"Domain Specific Language"*). Ces langages permettent de décrire un modèle sous forme mathématique, puis de le résoudre sans que l'utilisateur ait à rentrer dans les détails de l'algorithme.

Un défi important attend les spécialistes du calcul dans les années à venir. Pour faire face à la consommation énergétique, on assiste à une évolution de l'architecture des superordinateurs vers des assemblages de centaines de milliers de processeurs reliés entre eux par des connexions de vitesses variables. Cette évolution nécessite de développer de nouveaux algorithmes qui tiennent à la fois compte des opérations à effectuer, mais aussi des déplacements des données nécessaires à ces opérations. De plus, les calculs peuvent générer des données massives (*"big data"*) qu'il faut être capable de stocker, de compresser et d'analyser. Là aussi l'invention de nouveaux algorithmes est indispensable.

Conclusion. L'organisation actuelle de l'enseignement et de la recherche permettra très certainement de maintenir l'excellence de l'école française de modélisation mathématique et de calcul. Mais pour rester dans la course, il nous semble aujourd'hui important de développer les points suivants :

- Mieux décloisonner les disciplines pour trouver des applications pratiques à des objets mathématiques fondamentaux tout en développant de nouvelles branches des mathématiques à partir de besoins concrets de modélisation.
- Encourager les mathématiciens à travailler davantage avec les entreprises pour optimiser les codes de calculs et les procédés de fabrication. Il est également essentiel de communiquer auprès des décideurs et du grand public pour faire connaître l'efficacité des mathématiques.
- Inciter les mathématiciens qui écrivent des codes de calcul à utiliser les techniques de génie logiciel récentes et à s'intégrer dans des projets collectifs afin de pérenniser les retombées de leur travail. Il faut aussi des incitations pour développer l'analyse des algorithmes pour les ordinateurs à parallélisme hybride et pour les grands volumes de données (*"big data"*).

IV. DES INTERACTIONS EN FORT DÉVELOPPEMENT

Une bonne partie des mathématiques est née de l'étude du monde qui nous entoure. Les lois de l'Univers sont régies par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles, comme l'ont montré les travaux de Galilée, Newton, Maxwell, Boltzmann, Poincaré et Einstein. Mais aujourd'hui les mathématiques vont bien au-delà des besoins de la physique. Le but de ce chapitre est de détailler un certain nombre des interactions actuelles des mathématiques, non seulement avec la physique et la mécanique, mais aussi avec l'automatique, l'informatique, la chimie et les sciences du vivant. Comme on le verra, ces interactions vont dans les deux sens.

Les contributions qui suivent sont le résultat d'enquêtes et de nombreux contacts pris par des membres du Conseil scientifique aussi bien auprès de membres de la communauté mathématique qu'auprès de chercheurs relevant d'autres sciences.

Toutes ces contributions arrivent aux mêmes conclusions : il y a une vraie action structurelle à penser pour accroître les interactions et l'interdisciplinarité. En particulier, il convient d'explorer des pistes pour

- faciliter la communication entre les diverses communautés scientifiques, sachant que la mise en place d'un travail interdisciplinaire demande du temps ;
- faciliter la mobilité des chercheurs entre les instituts du CNRS, et ce aussi bien pour les chercheurs débutants que pour les chercheurs confirmés ; permettre à un chercheur de s'immerger dans un laboratoire d'un autre institut pendant une période longue, tout en restant affecté à son laboratoire d'origine ;
- en amont, afin que les chercheurs et les étudiants s'ouvrent à d'autres mondes que le leur, créer des formations interdisciplinaires de haut niveau (masters et programmes doctoraux communs, etc.) et encourager des cotutelles de thèses entre laboratoires de différents instituts ;
- favoriser l'accès à la bibliographie d'autres disciplines.

Les chercheurs qui travaillent aux interfaces ou au milieu d'autres disciplines ont souvent des carrières atypiques. Il convient de les soutenir et gérer leur carrière aussi bien que celles de chercheurs monodisciplinaires, en tenant compte des spécificités propres aux travaux interdisciplinaires. Ainsi pourra-t-on dépasser le cloisonnement actuel qui éloigne certains d'un investissement, jugé trop important, dans de véritables actions d'interface. Un tel décloisonnement nécessitera également des ingénieurs et des techniciens en soutien à de tels travaux.

D'un côté, si l'ouverture des mathématiques vers les autres disciplines a été spectaculaire au cours des dernières décennies et si les mathématiciens sont conscients de la nécessité d'attaquer des sujets communs, il faut, de l'autre, continuer à convaincre les autres sciences qu'elles ont tout à gagner à faire appel aux mathématiciens. Susciter l'intérêt pour les mathématiques est un défi ardu et exaltant.

1. Interactions avec la physique et la mécanique

Pour décrire ces interactions, un questionnaire avait été envoyé début 2013 aux laboratoires CNRS relevant de l'INSMI, de l'Institut de physique (INP) et de l'Institut des sciences de l'ingénierie et des systèmes (INSIS) ; environ un tiers des chercheurs ciblés ont répondu. A partir de leurs réponses nous avons isolé un certain nombre de blocs thématiques où l'interaction mathématique-physique nous a semblé particulièrement fructueuse et, surtout susceptible d'importants développements dans le futur.

1.1. Équations aux dérivées partielles et calcul scientifique. Les équations aux dérivées partielles (EDP) constituent un outil fondamental des mathématiques appliquées et elles sont de plus en plus associées d'un côté à l'analyse numérique et au calcul haute performance et de l'autre aux probabilités.

Dans le premier cas, nous observons un véritable défi stratégique qui consiste à développer des passerelles entre les mathématiques, la physique et les sciences de l'ingénieur pour mettre en place des projets interdisciplinaires, par exemple sur les sujets suivants : simulation d'écoulements turbulents à l'aide des moyens informatiques des plateformes de calcul parallèle ; modélisation de matériaux (multi-matériaux et matériaux granulaires) et en mécanique des structures ; modélisation des fluides magnétiques ; modélisation des écoulements diphasiques à phases séparées et dispersées, simulation numérique des transferts de chaleur convectifs ; modélisation et simulation dans les domaines fissurés ou fracturés ; modélisation stochastique et traitement statistique de champs de vitesses pour la formation d'images sismiques ; modélisation stochastique en milieux poreux.

Dans le deuxième cas, les EDP sont présentes (sous forme déterministe ou stochastique) pour l'étude entre autres du micromagnétisme, de la mécanique des fluides en géophysique, de modèles multi-échelles en mécanique des matériaux, de modélisations stochastiques dans les problèmes aux limites, de problèmes inverses stochastiques ; ainsi qu'en théorie cinétique et ses applications, en homogénéisation non linéaire et dans la théorie du transport optimal (on reviendra sur cet aspect plus loin).

Un autre aspect récurrent des EDP est l'étude analytique, numérique et expérimentale des ondes : ondes non linéaires ; propagation des ondes en milieux aléatoires multi-échelles ; guides d'ondes quantiques, acoustiques et élastiques ; écoulements côtiers, ondes scélérates. En particulier, le thème des guides d'onde paraît très fédérateur et on sent le besoin de mieux structurer les interactions autour de ce thème.

En résumé, la modélisation numérique est un point fort et incontournable dans l'activité de presque tous les laboratoires contactés et elle cimente de loin les interactions avec la physique et l'ingénierie. A un niveau plus concret, il s'agit de concevoir des méthodes numériques pour des problèmes couplés multi-échelles et multi-physiques, pour des EDP déterministes ou stochastiques, donnant lieu à des systèmes discrétisés de grand taille. Parmi les domaines actuellement très actifs, on évoquera ici le développement de modèles et d'algorithmes pour la commande et l'optimisation des systèmes, pour l'imagerie médicale et pour le contrôle non destructif des structures. Il est aussi intéressant de rappeler l'apport de domaines très théoriques à des interactions appliquées, notamment avec la mécanique : l'analyse asymptotique (pour la modélisation de plaques, collages, couches limites) ; l'homogénéisation (pour l'étude des matériaux à différentes échelles et composition) ; l'analyse harmonique et variationnelle, la théorie spectrale, etc. Face aux défis posés par la modélisation de certains problèmes complexes des sciences de l'ingénieur (topologie des écoulements turbulents, problèmes de grandes déformations, comportements singuliers des mécanismes en robotique, visionique,...), il apparaît aujourd'hui important d'exploiter également des outils mathématiques de la géométrie (différentielle et algébrique) : fibrés principaux, groupes de Lie, théorie des invariants, etc.

1.2. Systèmes dynamiques complexes, turbulents. Nous avons souligné au paragraphe précédent que les EDP et le calcul numérique sont des instruments de base dans l'étude de l'évolution des systèmes de dimension infinie. Toutes sortes de réductions à un nombre fini de variables ou de degrés de liberté permettent d'attaquer ces systèmes avec des théories plus géométriques (systèmes dynamiques différentiables), et l'éventuel passage à la limite se justifie avec des méthodes et hypothèses de nature statistique. Cette démarche peut concerner des situations physiques variées, telles que le transport de la chaleur, l'écoulement de glace, les réseaux de toute nature, la combustion, les phénomènes climatiques et bien entendu la turbulence. Le recours à des méthodes statistiques et probabilistes ne se situe pas qu'au niveau du passage à la limite « microscopique/macroscopique », mais aussi pour décrire le comportement de systèmes finis à l'évolution chaotique ou lorsqu'ils sont perturbés et que l'on veut comprendre le retour éventuel vers l'équilibre ou le départ vers des transitions critiques. On retrouve ces préoccupations lorsqu'on essaie d'établir le lien entre les systèmes dynamiques à petit nombre de degrés de liberté et la transition vers la turbulence dans des conditions proches de celles rencontrées dans les expériences.

Il est intéressant d'observer que l'étude des propriétés statistiques des systèmes dynamiques se développe dans plusieurs laboratoires selon des directions communes : on y retrouve particulièrement la théorie des extrêmes, les grandes déviations et plus généralement les théorèmes limites qui peuvent fournir un cadre formel aux problèmes de transport, notamment dans le plasma. Les probabilités ne sont qu'un aspect de l'évolution de ces systèmes. Il y a d'autres facettes des systèmes dynamiques, comportements réguliers, bifurcations, réponse (linéaire ou non) aux perturbations, qui nécessitent d'autres outils (géométriques, arithmétiques, combinatoires), et qu'on retrouve dans des situations physiques importantes, comme les systèmes hamiltoniens (plasma, problème à *n* corps, mécanique céleste), les réseaux complexes et les réseaux biologiques (ADN), le contrôle passif dans les systèmes dynamiques non linéaires. L'interaction systèmes dynamiques/mécanique statistique a aussi permis des percées originales pour la compréhension des systèmes ouverts, en particulier des systèmes hors équilibre en régime stationnaire. Citons à cet égard les nombreux travaux autour de l'hypothèse chaotique, les réseaux de mappings couplés et les différentes limites (hydrodynamiques, thermodynamiques) qui pourraient justifier l'émergence de lois phénoménologiques macroscopiques à partir d'une description microscopique déterministe. Nous aborderons aussi ces questions, de frontière, dans le paragraphe suivant.

1.3. Systèmes désordonnés. Dans le paragraphe précédent nous avions anticipé le rôle important des systèmes ouverts dans le développement de la physique statistique, concernant notamment la relaxation vers des états stationnaires hors équilibre. Il reste cependant beaucoup à faire et on peut déjà signaler quelques exemples de résultats qui semblent à portée de main à l'heure actuelle et devraient avoir un impact important.

- *Dans le cadre classique :* grandes déviations pour les systèmes à un nombre infini de degrés de liberté, relations de fluctuation pour des observables non bornées. Applications à l'hydrodynamique et plus généralement à la modélisation de systèmes physiques par des EDP dissipatives stochastiques (voir aussi les paragraphes précédents sur les EDP et les systèmes dynamiques).

- *En régime quantique :* étude mathématique de la dynamique hors équilibre des systèmes mésoscopiques, fondements mathématiques des méthodes heuristiques comme les formalismes de Schwinger-Keldysh et de McLenan-Zubarev, grandes déviations pour des processus quantiques, description probabiliste des processus d'interactions et de mesures répétées, relations entre localisation spectrale et propriétés de transport dans les systèmes désordonnés.

- Un domaine dans lequel les systèmes ouverts joueront également un rôle essentiel dans les années à venir est *l'information quantique*. L'étude des effets dissipatifs et des aspects thermodynamiques dans le transport et le traitement de l'information repose, à l'heure actuelle, sur des outils très rudimentaires et n'exploite pas encore les développements récents de la dynamique des systèmes ouverts.

Le premier point évoqué ci-dessus, la modélisation de systèmes de particules par des EDP, est une branche très active de cette *thermodynamique hors équilibre*. Peut s'opérer ici une nouvelle distinction entre dynamiques stochastiques et déterministes. Tandis que les techniques et les méthodes probabilistes citées ci-dessus (grandes déviations et fluctuations de densité et de courant notamment), sont du ressort des premières, pour les deuxièmes on rappellera l'importante masse de travaux autour des équations de Boltzmann et de Vlasov avec, pour celles-ci, la compréhension de l'amortissement Landau autour des solutions homogènes (l'amortissement autour des solutions non homogènes reste à explorer).

L'apport des probabilités dans l'étude des phénomènes critiques a enregistré des percées impressionnantes ces dernières années avec, en particulier, les résultats sur les propriétés asymptotiques d'invariance conforme, les processus SLE, les graphes et les cartes planaires aléatoires, les matrices aléatoires et leur rôle en complexité algorithmique et apprentissage statistique, la gravité quantique en dimension deux, etc.

L'approche probabiliste et statistique reste essentielle dans tous les aspects qui touchent aux systèmes désordonnés. A côté de recherches plus « traditionnelles », mais loin d'être achevées, comme celles sur les verres de spin, la localisation d'Anderson, les réseaux de neurones, les équations de fronts, les polymères, la séparation de phases, on enregistre des directions nouvelles. A cet égard, on citera ici les travaux récents sur le mouillage en présence de désordre, ceux sur le mouvement brownien branchant, sur les propriétés statistiques des valeurs propres de grandes matrices aléatoires, et enfin la modélisation stochastique multi-échelle en mécanique des matériaux, déjà rappelée ci-dessus (voir aussi le texte sur les probabilités dans la partie III.9).

1.4. Mesure quantique, décohérence quantique. Le problème de la mesure en mécanique quantique est le suivant : lorsqu'on réalise une mesure dans une expérience concrète, comment comprendre la « réduction du paquet d'onde », sur quelles échelles de temps se déroule-t-elle, et comment passe-t-on d'un formalisme non commutatif à un processus aléatoire au sens classique ?

Une question distincte, mais apparentée, est celle de la décohérence quantique. La théorie de la décohérence s'attaque au problème de la disparition des états quantiques superposés au niveau macroscopique : on n'observe en effet que des états purs, ce qui est expliqué par le fait que le couplage avec une observation extérieure conduit à une réduction du paquet d'onde. Ceci est un des obstacles pratiques à la réalisation d'un hypothétique ordinateur quantique. Mais en deçà de cette application technologique lointaine, se posent des questions mathématiques fondamentales comme celles de classifier les différents types d'intrication quantique, de réaliser que la décohérence implique des phénomènes de corrélations autres que l'intrication, et qui appellent une description mathématique ; de comprendre le lien entre la nature de ces corrélations et le *"speed-up"* quantique (c'est-à-dire la plus grande efficacité des algorithmes quantiques par rapport aux algorithmes classiques). Ces questions font intervenir l'analyse fonctionnelle, la géométrie différentielle, les probabilités classiques et quantiques ainsi que la théorie de l'information.

1.5. Gaz froids et ultra-froids, systèmes quantiques à *N* corps. Les systèmes à très basse température sont un des champs d'exploration expérimentale les plus actifs à l'heure actuelle. Froids, ils peuvent être modélisés par la théorie cinétique « classique » (équation de Vlasov) déjà évoquée ; ultra-froids, ils nécessitent de faire appel à une description quantique, et les questions les plus en pointe sont celles qui touchent à la supraconductivité. Les modèles étudiés par les mathématiciens sont basés sur la version non relativiste de l'équation de Schrödinger, une description rigoureuse des modèles relativistes restant à établir.

Les gaz d'atomes froids sont des systèmes constitués d'un nombre d'atomes piégés par laser allant du millier au million. Ils sont devenus un des moyens les plus efficaces de simuler expérimentalement le comportement des hamiltoniens quantiques à *N* corps. Ces systèmes sont le plus souvent hors équilibre et, de même que dans le cas classique évoqué plus haut, une théorie mathématique de la thermodynamique quantique hors équilibre serait la bienvenue.

Un phénomène observé dans certains alliages à très basses températures est celui de la supraconductivité. Les applications technologiques sont évidentes, même si l'obtention de températures saussi basses (proches de 0 K) constitue un frein. Ces supraconducteurs « conventionnels » sont décrits de manière macroscopique par l'équation de Ginzburg-Landau. Dans les supraconducteurs de type II se forme un réseau de vortex isolants au milieu d'une mer conductrice. Comprendre la géométrie et la dynamique de ces vortex reste un enjeu majeur, tout particulièrement en dimension 3. On peut noter au passage que l'étude mathématique de ces vortex est assez proche de celle des vortex qui se forment dans les condensats de Bose-Einstein en rotation, observés depuis une quinzaine d'années et décrits par l'équation de Gross-Pitaevskii. Parmi les questions complètement ouvertes à l'heure actuelle, il y a la description du supraconducteur quand la densité des vortex est grande et en présence d'un champ électrique.

On parle depuis vingt cinq ans de supraconducteurs à haute température pour désigner de nouvelles structures cristallines, obtenues expérimentalement, et qui sont supraconductrices à des températures beaucoup plus « élevées » que les supraconducteurs conventionnels (jusqu'à 140 K). Il n'existe aucune explication théorique au mécanisme de cette supraconductivité. Il n'y a donc aucune possibilité de prédire à l'avance les propriétés de ces alliages. Les physiciens théoriciens explorent de nouveaux modèles : modèle de Mott et de Hubbard, systèmes à N corps sur des réseaux à géométrie inhabituelle (graphène, réseau *kagome*, cactus de Husimi, réseau pyrochlore) servant à modéliser des interactions magnétiques dites « frustrées », modèles d'alliages avec impuretés, modèle d'Anderson-Kondo. Ils explorent également des modèles où les interactions entre particules sont plus fortes que pour la supraconductivité classique. Le graphène est en quelque sorte à un point critique dans l'espace des modèles sur réseau : de petites perturbations peuvent le transformer en un isolant topologique. Il est donc important de comprendre la théorie spectrale du graphème : l'effet de petites déformations du réseau hexagonal, de l'ajout d'un potentiel aléatoire, ainsi que les effets de bord dans le cas d'un système de taille finie. Les approches sont de plusieurs types. Pour les approches numériques, l'intervention de mathématiciens numériciens serait nécessaire pour justifier théoriquement les schémas utilisés. Il serait aussi tout-à-fait judicieux que les mathématiciens se penchent sur les nouvelles structures cristallines évoquées plus haut afin d'apporter un socle théorique à l'étude de la dynamique hors équilibre, des transitions de phase ou des états fondamentaux.

Rappelons que pour la physique de la matière condensée en dimension 2, les techniques de théorie des champs s'avèrent très fructueuses, que ce soit par une approche perturbative (diagrammes de Feynmann) ou par une approche exacte, rendue possible par l'utilisation de l'invariance conforme. Plus généralement, l'utilisation de l'invariance conforme pour l'étude des phénomènes critiques est un domaine où les mathématiques et la physique ont fusionné ces dernières années. A cet égard, nous rappelons aussi l'apport remarquable des techniques issues de l'étude des systèmes intégrables. On peut maintenant commencer à explorer la pertinence de la notion d'invariance conforme en plus grande dimension.

1.6. Chaos quantique, statistiques spectrales. La question de la localisation des fonctions d'ondes en mécanique quantique reste une des grandes questions de physique mathématique, que ce soit pour des modèles discrets de particules sur réseau (de type Anderson) ou pour des modèles continus d'équations de Schrödinger sur des variétés ; pour des modèles linéaires comme non linéaires. Cette question est intimement liée à celle de la conductivité évoquée au paragraphe précédent. Mentionnons aussi que l'étude de la localisation pour les états résonants des systèmes ouverts est en plein essor.

La question de la localisation des fonctions propres est liée à celle des statistiques spectrales : des systèmes régis par des statistiques poissonniennes devraient donner lieu à des fonctions propres localisées, alors que les systèmes régis par des statistiques de type *Gaussian Orthogonal Ensemble* (GOE) ou *Gaussian Unitary Ensemble* (GUE) devraient être associés à des fonctions propres délocalisées. Classer des systèmes physiques réels dans l'une ou l'autre de ces classes d'universalité est une question très difficile. Les physiciens explorent aussi des classes d'universalité intermédiaires pour les statistiques spectrales, ainsi que les propriétés multifractales des fonctions propres.

1.7. Relativité générale. C'est un domaine naturellement proche des mathématiques. L'apport de ces dernières se développe dans plusieurs directions : l'analyse géométrique, issue de la théorie des surfaces minimales et de la géométrie riemannienne, s'intéresse notamment à la construction de solutions des équations d'Einstein ; la théorie des équations hyperboliques non linéaires (mentionnés ailleurs) commence à aborder des problèmes de stabilité. L'aspect numérique des équations d'Einstein fait l'objet de nouveaux travaux, notamment à des fins de détection, où l'aspect non linéaire des équations joue un rôle essentiel. Par ailleurs les propriétés à grande échelle, la cosmologie, sont une source de nombreux problèmes présents et futurs. A moyen terme la détection d'ondes gravitationnelles par les grands instruments aura un impact profond sur le domaine, du point de vue de la physique. Il y a déjà une activité importante liée à la détection numérique de ces ondes. Celle-ci aura vraisemblablement un retentissement important dans le domaine théorique également.

1.8. Recommandations

(a) Il existe nombre de nœuds bien balisés d'interactions entre mathématiques et physique. Il serait bon que les mathématiciens s'aventurent maintenant dans des domaines de la physique qu'ils n'ont pas encore explorés. L'affectation par le CNRS de mathématiciens au sein de laboratoires de physique est à développer.

(b) Les physiciens et les mathématiciens n'arrivent souvent pas à se comprendre par l'écrit ; en effet, il est difficile pour un physicien d'extraire une information profitable d'une publication mathématique et vice versa. Cet état de fait est très regrettable car beaucoup de résultats mathématiques, traduits en termes simples ou expliqués sur des exemples au lieu d'être exprimés dans la plus grande généralité possible, seraient susceptibles d'être utiles aux physiciens. Il conviendrait de créer un espace de publication où les mathématiciens pourraient faire paraître une version de leurs articles rédigée à destination de la communauté physicienne. La démarche réciproque de la part des physiciens serait à coup sûr également bienvenue.

2. Interactions avec l'automatique

2.1. Introduction. L'automatique est un vaste domaine des sciences de l'ingénieur. La partie qui s'occupe de la dynamique des systèmes contrôlés, appelée la théorie du contrôle, s'attache à construire des commandes qui, appliquées à un système, réalisent les objectifs suivants :

- *la planification de trajectoires :* amener le système d'une condition initiale donnée à une cible fixée, éventuellement en optimisant un critère (contrôle optimal) ;
- *la régulation :* réaliser ce mouvement malgré des perturbations ou des erreurs de modèle.

Une thématique connexe est *l'estimation* : on veut identifier certains paramètres d'un système, ou son état, à partir de mesures partielles.

Les systèmes étudiés sont modélisés par des équations différentielles ordinaires (EDO), des équations aux dérivées partielles (EDP), des systèmes discrets ou des systèmes hybrides. Les techniques mathématiques utilisées sont variées : analyse, groupes de Lie, géométrie (symplectique, riemannienne), programmation dynamique, processus stochastiques, etc.

La théorie du contrôle a des applications bien connues en sciences de l'ingénieur (le régulateur de Watt pour les machines à vapeur date de 1788), dans les procédés industriels à large échelle (production d'électricité d'origine nucléaire, production d'aluminium, extraction pétrolière, raffinage, industrie du ciment, etc.), en robotique (modélisation, planification de mouvements, trajectoires optimales, etc.) et dans les technologies de pointe comme l'aérospatiale (avions, satellites, drones) et l'armement. Des applications sont apparues récemment en chimie/physique quantique, biologie, médecine, économie, finance mais aussi en mathématiques pures, où des techniques de théorie du contrôle ont apporté des contributions importantes.

La théorie du contrôle se développe bien. Les vingt dernières années ont connu des avancées majeures en contrôle des EDP, un domaine où la France est en pointe. Mais de nombreux problèmes fondamentaux restent encore ouverts ; la théorie du contrôle est une science jeune.

Au CNRS, la théorie du contrôle relève d'une part de l'INSIS (Institut des sciences de l'ingénierie et des systèmes) pour la recherche la plus appliquée et d'autre part de l'INS2I (Institut des sciences de l'information et de leurs interactions) et de l'INSMI pour les études les plus théoriques. L'INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique) intervient au niveau des interactions entre mathématiques, automatique et informatique ; de même l'INRA (Institut national de la recherche agronomique) pour le contrôle des bioréacteurs et l'agriculture sous contrainte environnementale. Cependant, cette séparation est loin d'être rigide, comme en témoignent les nombreuses collaborations entre les chercheurs de différents instituts, l'existence de chercheurs ayant partagé leur carrière entre ces différents instituts, la présence de réseaux communs de recherche (ERC, GdR, ANR, etc.).

2.2. Thématiques émergentes. *L'étude mathématique de problèmes de contrôle quantique* est motivée par leurs applications en haute-technologie : résonance magnétique nucléaire (avec des applications en médecine), spectroscopie laser. Les équations de type Schrödinger, Bloch ou Lindblad sont actuellement très étudiées. Soulignons que « technologie quantique » est un des mots-clés du programme pour les futures technologies émergentes (FET) à l'horizon 2020 de l'Union Européenne.

L'application de techniques de la théorie du contrôle aux mathématiques pures est en pleine expansion. Par exemple, le principe du maximum de Pontryagin est maintenant un outil fondamental pour l'étude des opérateurs hypoelliptiques ou des cônes asymptotiques des groupes nilpotents. Des techniques de contrôle sont cruciales dans l'étude des systèmes stochastiques ou en théorie KAM faible. La théorie du contrôle a permis de construire des exemples importants en théorie des singularités (la caustique en géométrie sous-riemannienne de contact) et en théorie géométrique de la mesure (métrique de Carnot-Carathéodory).

2.3. Perspectives. Voici quelques domaines où des avancées importantes sont attendues.

2.3.1. Contrôle des EDP

Inégalités de Carleman. La méthode de dualité hilbertienne établit l'équivalence entre la contrôlabilité d'un système commandé linéaire et l'inégalité d'observabilité pour son système adjoint. Les estimées de Carleman (qui sont des estimées *a priori* dans des espaces de Sobolev à poids) sont un outil puissant pour démontrer ces dernières. Actuellement, une grande attention est portée à leur utilisation pour des systèmes pathologiques (EDP couplées, EDP paraboliques dégénérés, EDP à coefficients discontinus), des schémas de discrétisation, ou pour trouver des contrôles insensibilisants.

Systèmes non linéaires. La méthode usuelle pour démontrer la contrôlabilité d'une EDP non linéaire (reposant sur la contrôlabilité de sa linéarisée) s'avère inexploitable pour beaucoup d'EDP classiques. D'autres techniques, qui tirent profit de la non-linéarité, se développent énormément telles la méthode du retour de Coron et le développement aux ordres supérieurs.

Stabilisation. Les problèmes de stabilisation sont très bien compris pour les EDO, mais beaucoup de questions restent ouvertes pour les EDP. Par exemple, la stabilisation rapide d'EDP devrait être un sujet porteur dans les prochaines années.

Robustesse. Pour être utilisables en pratique, les résultats théoriques (de contrôle, de stabilisation) doivent souvent être valables pour une large classe de paramètres. Il s'agit alors de prouver qu'ils ont lieu *génériquement* (pour un ensemble dense de paramètres) ou *presque sûrement* (au sens d'une mesure). Beaucoup reste à comprendre dans cette direction.

Calcul numérique des contrôles. Pour calculer numériquement le contrôle d'une EDP, il est naturel de vouloir passer à la limite sur les contrôles des systèmes discrétisés de cette EDP. Mais cette méthode fonctionne mal : cela a été démontré sur beaucoup EDP et de schémas usuels. Des méthodes numériques efficaces et applicables ont été mises au point, mais leur validation théorique reste souvent encore à faire. De façon générale, la caractérisation des schémas permettant le calcul des contrôles devrait être un sujet important dans les prochaines années.

Interaction entre dimension finie et infinie. L'utilisation de techniques de dimension finie sur les approximants de Galerkin s'est révélé fructueux pour contrôler certaines EDP, comme Navier-Stokes ou Schrödinger. Il est maintenant indispensable de mieux comprendre les propriétés nécessaires à la mise en œuvre de cette approche et ses limitations. Cela contribuerait aussi au développement des méthodes numériques.

2.3.2. Contrôle de systèmes complexes

Systèmes hybrides. Ce sont des systèmes dont l'état saute d'une variété à une autre au cours du temps (commutation) : leur dynamique a une partie continue et une partie discrète. Les informaticiens les utilisent notamment comme modèles pour tester des logiciels. Les systèmes hybrides sont activement étudiés. Le calcul des ensembles invariants fait appel, dans ce contexte, à des techniques mathématiques variées : EDP dans des domaines polyédraux, algèbre différentielle, programmation semi-algébrique. Beaucoup de problèmes restent ouverts, comme la caractérisation de la stabilité d'un système en dimension 3 soumis à des sauts arbitraires.

Contrôle de flux sur les réseaux. De nombreux phénomènes physiques sont modélisés par des EDP posées sur des domaines à géométrie compliquée (réseaux, graphes, ensembles stratifiés) : les fluides pour les canaux d'irrigation, la circulation sanguine, les gazoducs, les écoulements dans les forages pétroliers, le trafic routier, les réseaux électriques ou génétiques, etc. Ces dix dernières années, le contrôle de ces EDP a connu des avancées exceptionnelles et, très souvent, les résultats mathématiques obtenus sont applicables très simplement en ingénierie. Cette expansion devrait se poursuivre, compte tenu des forts enjeux applicatifs et de la richesse des mathématiques déjà développées.

Systèmes multi-agents. La compréhension de la dynamique sociale de larges groupes d'individus s'est développée depuis plusieurs années et l'analyse mathématique de modèles d'auto-organisation et les conception et développement d'algorithmes de contrôle sont devenus de la plus haute importance. Citons comme applications l'étude des mouvements de foule, la coordination des déplacements dans le milieu animal (vols d'oiseaux, bancs de poissons, etc.), les phénomènes d'agrégation en microbiologie, l'évolution des tendances dans le milieu socio-économique, le contrôle et l'organisation de groupes de robots, la coordination de satellites. Les techniques mathématiques utilisées font appel au transport optimal et à l'optimisation convexe. L'approche dite de limite par champ moyen (où le système d'équations différentielles est remplacé par une EDP) est très utilisée.

2.3.3. Estimations de paramètres, filtrage et problèmes inverses. Dans de nombreuses applications, il est important d'estimer les paramètres ou l'état d'un système à partir de mesures partielles. Par ailleurs, lorsqu'on s'intéresse à la conception, la modélisation et l'analyse de modèles complexes, il faut tenir compte de nombreuses sources d'incertitudes : incertitudes sur le modèle ou sur certains paramètres physiques, aléas naturels sur les phénomènes considérés. Des efforts doivent être faits pour développer des techniques de quantification des incertitudes, de filtrage non linéaire, de filtrage particulaire, etc. D'autre part, un traitement automatisé de certains problèmes inverses est très prometteur et, dans cette direction les chercheurs en automatique, en statistique et en calcul scientifique devront mettre leurs compétences en commun.

2.3.4. Robotique. Les développements de la robotique, tant dans ses nouveaux champs d'application que dans ses composantes mécatroniques, tendent à renouveler les approches traditionnelles du contrôle de systèmes complexes. Le contrôle classique en vitesse et position ne répond pas aux nouvelles contraintes qu'impose l'interaction physique homme-robot, interaction qui n'était pas envisageable jusqu'à une période récente. Dans ce contexte, les contraintes de sécurité et l'apparition de nouveaux actionneurs compliants imposent la conception de nouveaux schémas de contrôle.

Par ailleurs, la programmation de robots était jusqu'à présent envisagée en deux étapes : planification, puis exécution du mouvement. Cette approche atteint ses limites dès lors qu'on souhaite un robot plus autonome et réactif aux changements de son environnement. La rapidité des processeurs couplée aux progrès récents en matière d'optimisation numérique permet d'envisager des approches unifiées de la génération de mouvement ; c'est le cas par exemple du contrôle prédictif.

Enfin, alternative aux méthodes stochastiques d'apprentissage automatique, le contrôle optimal inverse est identifié aujourd'hui comme un thème critique de la robotique, en synergie avec les neurosciences. La découverte des principes d'optimalité qui sous-tendent l'action humaine (problème inverse) permet en effet d'appliquer ces principes pour contrôler des systèmes aussi complexes qu'un robot humanoïde (problème direct).

2.3.5. Contrôle quantique. Né au début du 21e siècle, le contrôle quantique est appelé à jouer pour la théorie du contrôle le rôle qu'a joué la robotique dans les années 1960-1980. La motivation vient de nouvelles applications dans le domaine des hautes-technologies, résonance magnétique nucléaire, spectroscopie laser, photochimie, etc. Sur le plan mathématique, les techniques classiques étant souvent inopérantes, il faut développer des outils nouveaux. L'étude mathématique des problèmes de contrôle quantique est un sujet jeune ; des avancées sont attendues sur la théorie (contrôlabilité d'EDP, contrôlabilité simultanée, identification, contrôle optimal, etc.) et sur la mise en œuvre numérique (calcul scientifique, optimisation de la forme des champs). Un problème fondamental est la compréhension et l'unification des notions existantes de rétroaction quantique (*"quantum feedback"*). C'est un sujet délicat car toute mesure perturbe le système à l'échelle quantique. De gros efforts doivent être faits pour développer les interactions entre physiciens et mathématiciens, ce qui sera également nécessaire pour rendre les résultats mathématiques exploitables dans les expériences.

2.3.6. Contrôle optimal

(a) Equations de Hamilton-Jacobi-Bellman. Les équations de Hamilton-Jacobi (HJ) proviennent de la mécanique classique. Des développements spectaculaires de la théorie ont eu lieu quand on a réalisé dans les années 1950 que beaucoup de problèmes de contrôle peuvaient être étudiés *via* une EDP de ce type ; on parle dans ce cas d'équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Les nouveaux thèmes suivants sont prometteurs.

- Les équations HJB posées sur des ensembles compliqués (contraintes d'état) provenant de problèmes de contrôle optimal sur des réseaux, des structures stratifiées, etc. Elles présentent des discontinuités en espace qu'on ne peut pas traiter avec la théorie classique.
- Des algorithmes numériques performants pour résoudre HJB. En finance mathématique ou dans des problèmes proie-prédateur par exemple, la dimension d'espace est vite supérieure à 5-6, ce qui rend les méthodes numériques classiques inutilisables. De nombreux efforts sont faits pour contourner ces problèmes : approximations max-plus, algorithmes stochastiques, apprentissage automatique, maillages destructurés, etc.
- L'application des progrès de la théorie de HJB pour l'étude des systèmes dynamiques lagrangiens (*cf.* théorie KAM faible) a produit des résultats inespérés et permet des applications de la théorie du contrôle aux mathématiques pures.
- Les jeux différentiels déterministes et stochastiques avec information incomplète, les jeux répétés. Ces modèles conduisent à des équations de HJ de types nouveaux. Signalons aussi que les équations de HJ correspondant aux jeux différentiels sont non convexes et la théorie doit encore être largement développée dans cette direction.
- De nombreux nouveaux modèles prometteurs (jeux à champ moyen, problèmes de transport optimal, de biologie) font intervenir une équation de HJ couplée à des équations de natures différentes. Par exemple, les jeux à champ moyen modélisent un grand nombre d'agents cherchant à résoudre un problème de contrôle optimal avec une dynamique et un coût dépendant fortement des autres agents. Ce problème peut se ramener à un système HJB-équation de transport.
- Les équations HJB du second ordre sont abondamment utilisées en contrôle stochastique

avec de nombreuses applications en finance mathématique, en biologie (écologie, dynamique des populations), etc. Les développements récents et actuels des solutions de viscosité pour les équations du second ordre jouent un rôle important dans la popularité de cette méthode.

(b) Contrôle optimal de systèmes en biologie et applications à la médecine. La théorie du contrôle est extrêmement utile en biologie pour le contrôle des bioréacteurs, l'agriculture sous contrainte environnementale, les traitements médicaux (chimiothérapie, chronothérapie, repliement de protéines), etc. Le but est alors de construire des contrôles optimaux, un problème difficile, même dans les cas les plus simples. Très souvent, les problèmes sont modélisés par des EDO, mais les EDP prennent une part de plus en plus importante (optimisation de ressources pour les cellules folliculaires par exemple). Les techniques employées peuvent être très sophistiquées car des contraintes d'état et des dynamiques avec retard peuvent être présentes. Il faut souligner que les médecins font aujourd'hui de plus en plus confiance aux stratégies de traitement venant de la théorie du contrôle optimal.

2.3.7. Optimisation convexe et relaxations semi-définies. Les années 1990 voient le développement d’algorithmes de résolution numérique de problèmes d’optimisation convexe et, à la même période, les automaticiens réalisent que de nombreux problèmes de commande robuste, essentiellement formalisés par la théorie de Lyapunov (début du 20e siècle), peuvent se formuler comme des problèmes de programmation linéaire sur le cône des matrices semi-définies c’est-à-dire des problèmes sur les inégalités matricielles linéaires. De nouveaux algorithmes et logiciels sont alors développés donnant naissance à l'optimisation robuste. Très récemment, les liens entre automatique et optimisation prennent un nouvel essor en s'appuyant sur des résultats de géométrie algébrique réelle et d'analyse fonctionnelle pour résoudre numériquement des problèmes de minimisation à l’aide d’une hiérarchie de problèmes d'inégalités matricielles linéaires. Actuellement, dans le champ de l’automatique, ces travaux sont étendus à l’évaluation de performance (analyse de robustesse des systèmes non linéaires incertains, avec retards, saturations, etc.) et au contrôle optimal de systèmes à dynamique polynomiale et à contraintes semi-algébriques explicites sur l’état. Des applications en robotique humanoïde (commande optimale inverse) sont également développées. Ce domaine est très prometteur et l'intérêt pour ces méthodes va au-delà du cercle initial de l'automatique : sciences de l'information, informatique théorique et quantique, cryptographie, etc.

2.3.8. Applications de la théorie du contrôle aux mathématiques pures

(a) Théorie ergodique. Considérons un système dynamique (de dimension finie ou infinie) sujet à des perturbations aléatoires. Quand les perturbations affectent toutes les variables du système, les théorèmes classiques garantissent l'ergodicité du système, c'est-à-dire que tout converge vers une mesure invariante. Le problème devient plus compliqué quand les perturbations n'agissent que sur certaines des variables. Les non-linéarités propagent les perturbations au système tout entier. Ce problème est intimement relié au problème de la contrôlabilité. Des résultats intéressants sur le sujet ont été obtenus pour les équations de Navier-Stokes et Burgers. Le sujet est très prometteur.

(b) Groupes nilpotents de type fini. Récemment les structures finslériennes ont joué un rôle important dans l'analyse de la convergence des groupes nilpotents de type fini équipés d'une métrique invariante à gauche vers leurs cônes asymptotiques (au sens de Gromov-Hausdorff). Les problèmes de temps minimum en contrôle optimal peuvent être utilisés pour décrire les boules de la métrique de Finsler. De telles études sont basées sur les caractérisations des géodésiques associées à de telles métriques et en particulier au calcul de bornes explicites du nombre de leurs *bangs*. Cela permet d'obtenir des informations sur le comportement asymptotique des groupes à croissance polynomiale.

(c) Géométrie sous-riemannienne. Elle généralise la géométrie riemannienne : le déplacement d'un point est possible seulement dans un ensemble de directions prescrit par le problème physique considéré. Quand cet ensemble de directions coïncide avec le plan tangent tout entier, on re-

trouve la géométrie riemannienne classique. Cette géométrie est sous-jacente à la théorie des opérateurs hypoelliptiques et de la diffusion dégénérée sur les variétés. La géométrie sous-riemannienne a connu un grand essor dans les années 1980 grâce à l'école de Gromov et à l'utilisation de techniques probabilistes. A la même période, les chercheurs en robotique ont découvert que la géométrie sous-riemannienne s'accordait bien avec la théorie du contrôle géométrique. Un certain nombre de contributions fondamentales vient de la communauté du contrôle géométrique, en particulier en ce qui concerne les propriétés de régularité de la géométrie sous-riemannienne et des géodésiques anormales minimisantes. Cependant de nombreux problèmes restent ouverts comme les liens entre la géométrie et l'analyse (par exemple, la compréhension de la diffusion de la chaleur quand la distance sous-riemannienne n'est pas régulière dans le *cut locus*, sur la diagonale, le long des géodésiques anormales minimisantes). A la fin des années 1990, le sujet a un peu perdu de sa popularité car les problèmes ouverts étaient trop difficiles. Très récemment la géométrie sous-riemannienne revit un âge d'or car elle se révèle une structure extrêmement riche pour des domaines mathématiques modernes comme la théorie géométrique de la mesure ou le transport optimal. De plus, elle joue maintenant un rôle dans de nouvelles applications en traitement d'images (en particulier dans les algorithmes neuromimétiques pour la restauration d'images), en neurophysiologie, pour le développement de *microswimmers*, en contrôle quantique. Mentionnons enfin que des questions fondamentales restent d'actualité en ce qui concerne la géométrie et l'analyse géométrique des variétés sous-riemannienne et les liens avec les invariants différentiels. Il y a également un manque de méthodes numériques pour traiter les équations elliptiques et paraboliques dégénérées et les techniques connues ne permettent pas d'approche systématique pour le contrôle de ces EDP. Ce domaine est très prometteur et les développements se font à travers des collaborations entre les chercheurs en contrôle, géométrie et probabilités.

3. Interactions avec l'informatique

3.1. Contexte et remarques générales. Les interactions entre mathématiques et sciences de l'information concernent un nombre considérable de thématiques et revêtent des formes extrêmement variées. Il arrive que l'informatique apporte en premier lieu des problèmes, dont la résolution nécessite le développement de techniques mathématiques spécifiques, imprégnées du point de vue informatique. À l'inverse, de nombreuses méthodes mathématiques (en imagerie, codage, traitement de données,...) n'ont pu être développées que conjointement avec les méthodes informatiques complémentaires (algorithmique, programmation, théorie de la complexité, preuves formelles,...). Notons aussi que l'interaction entre mathématiques et informatique passe souvent par la *médiation d'une autre discipline* (physique, musique, sciences de l'ingénieur). Les équipes concernées par ces interactions se rencontrent donc dans les laboratoires de mathématiques et d'informatique, mais pas exclusivement. Les *sciences sociales* par exemple attirent beaucoup les mathématiciens car elles soulèvent de nouveaux problèmes en contrôle, en optimisation, en théorie de la décision. Les interactions conjointes des mathématiques et de l'informatique avec la biologie, la chimie, l'automatique, sont abordées dans les sections correspondantes de ce rapport.

De nouvelles occasions d'interagir se présentent régulièrement. Mais il semble important aussi de *soutenir le double ancrage* en mathématiques et en informatique de recherches qui ont déjà acquis une forte reconnaissance internationale, par exemple la logique linéaire et le calcul formel.

Les interactions entre mathématiciens et informaticiens motivent parfois le développement mutualisé d'algorithmes ou de *logiciels* de calcul mathématique (par exemple le logiciel libre *Sage*). Les domaines concernés par ce développement d'algorithmes et de logiciels sont nombreux : combinatoire, théorie des groupes, calcul formel, théorie algorithmique des nombres, topologie. Il peut s'agir de développer et d'implanter des algorithmes pour calculer, expliciter, classifier des objets mathématiques, tester des hypothèses théoriques. Il peut s'agir de mettre en œuvre ces objets dans un contexte applicatif précis (codage, cryptographie, géométrie effective, etc.). Il peut s'agir enfin d'étudier l'algorithmique de ces objets pour elle-même. Cette algorithmique soulève en effet des questions difficiles et profondes au carrefour des mathématiques et de l'informatique.

Un point crucial est la *formation* d'étudiants compétents. Les étudiants en informatique sont souvent peu formés en mathématiques, et réciproquement. On observe souvent le même cloisonnement au niveau des formations d'ingénieurs. Plusieurs établissements ont ouvert des formations à l'interface des mathématiques et de l'informatique (en Licence, Master, et parfois même en Doctorat), avec des succès divers.

Les postes croisés mathématiques-informatique au niveau CR2 sont très utiles. On pourrait envisager des postes croisés au niveau senior également. On suggère aussi des *délégations croisées*, qui placeraient réellement un enseignant-chercheur d'une discipline dans un laboratoire de l'autre. Les universités, quant à elles, pourraient ouvrir des postes d'enseignants-chercheurs à cheval entre mathématiques et informatique, avec une répartition de la charge d'enseignement équilibrée entre les deux disciplines. Les expériences menées à l'étranger montrent que de telles initiatives renforcent les interactions entre les deux communautés.

Les *échanges internationaux* (conférences, UMI, invitations de chercheurs étrangers) enrichissent les interactions entre mathématiques et informatique, l'interface entre les deux disciplines étant structurée différemment selon les pays.

Les deux communautés (mathématiques et sciences de l'information) n'ont pas toujours les mêmes pratiques ou traditions en *matière documentaire*. Des bibliothèques communes existent parfois. Les échanges informels sont aussi nombreux. Les bibliothèques de mathématiques des laboratoires rattachés à l'INSMI appartiennent au Réseau National des Bibliothèques de athématiques (RNBM), qui négocie des acquisitions de ressources électroniques. Les laboratoires en sciences de l'information ou sciences de l'ingénieur non rattachés à l'INSMI ne peuvent adhérer au RNBM et n'ont donc pas d'accès aux ressources négociées par le RNBM. On suggère que le CNRS raisonne, autant que possible, non par institut, mais par thématique des laboratoires de façon à donner des accès pertinents et des possibilités d'acquisition à des ressources négociées. Ceci vaut pour tous les instituts.

3.2. Logique, méthodes formelles, théorie de l'information, calcul formel, algèbre-géométrie-théorie des nombres effectives, cryptographie et codage. Les méthodes formelles, l'algèbre effective, la logique, la théorie des automates, la théorie des langages, la théorie des monoïdes et des semi-groupes, la théorie des catégories, la théorie des groupes suscitent de nombreuses interactions entre mathématiciens et informaticiens.

La modélisation et la vérification mobilisent des méthodes de logique, d'homotopie abstraite ou de topologie algébrique dirigée. Les méthodes formelles trouvent des applications aussi variées que l'assistance à la preuve de théorèmes, la certification, la sécurité industrielle : aéronautique, paiement sécurisé, génie logiciel, innovation collaborative. L'attente dans ce domaine est très forte, par exemple de la part des entreprises et des autorités de régulation. Autre exemple, la théorie des semi-groupes inversifs s'applique à la modélisation des systèmes informatiques temps-réel interactifs et offre un langage algébrique pour la synchronisation de flux : flux audio, vidéo ou contrôle-commande.

De nombreux défis du calcul scientifique (en conception assistée par ordinateur, robotique, vision, biologie moléculaire) relèvent de *l'algèbre effective et de la géométrie algébrique*. Les problèmes sous-jacents sont par exemple le calcul de résultants, la factorisation de polynômes, l'étude de singularités, la topologie des ensembles semi-algébriques, les calculs d'intersection. Les méthodes formelles et numériques pour résoudre ces problèmes sont complémentaires.

La théorie des codes et la cryptographie relient des mathématiques théoriques (géométrie algébrique, théorie des nombres, etc.) aux applications industrielles (carte à puce, Internet, satellites, etc.) par l'entremise de la discipline informatique (implémentation, théorie de la complexité). Les attaques physiques sur les puces (dites par canaux cachés) relèvent de l'électronique, mais les contremesures en cours d'élaboration sont de nature algorithmique et mathématique. Il s'agit de concevoir une arithmétique des ordinateurs qui ne laisse s'échapper aucune information du processeur (rayonnement, consommation électrique) susceptible de trahir les calculs en cours d'exécution. À plus long terme, les défis soulevés par un hypothétique ordinateur quantique en termes de sécurité conduisent à explorer ou développer des cryptographies alternatives non vulnérables à ce type d'ordinateur. La cryptologie à base de réseaux euclidiens en est un exemple.

La *logique mathématique* a évolué dans les quarante dernières années. Une partie de celle-ci, la théorie des modèles, la théorie des ensembles, est restée dans le giron des mathématiques tandis qu'une partie de plus en plus importante, la théorie de la démonstration, la calculabilité et la complexité, basculait lentement du côté de l'informatique. Ce mouvement semble s'inverser avec le développement des méthodes homotopiques en théorie du calcul.

La recherche sur les *systèmes dynamiques discrets* se décline autour de trois thématiques principales : l'étude des grandes classes de systèmes dynamiques discrets (dynamique symbolique, pavages, automates cellulaires), l'étude des systèmes à événements discrets et l'évaluation de performances (aspects logiques, temporels et probabilistes), et enfin, la modélisation et l'analyse en moyenne des algorithmes par des systèmes dynamiques.

L'étude des automates cellulaires et pavages selon les points de vue complémentaires de la théorie de la calculabilité et de la dynamique symbolique est un thème en plein développement. De nombreux modèles de calcul gagnent à être vus comme des systèmes dynamiques, déterministes ou stochastiques. Inversement, la capacité de nombreux systèmes dynamiques à encoder du calcul nous éclaire sur leur complexité et leur prédictibilité. Dans le même ordre d'idées, le *"natural computing"* étudie de nouveaux modèles de calcul inspirés de phénomènes naturels.

3.3. Combinatoire, algorithmique, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire. La combinatoire et l'algorithmique sont partagées entre informatique et mathématique et sont le lieu naturel d'une interaction : combinatoire énumérative, bijective, analytique, algébrique, des graphes. La théorie des probabilités, l'étude asymptotique des grands objets discrets, la théorie des représentations de groupes, la recherche opérationnelle sont d'autres thèmes communs importants. Autre exemple, la détermination de *plans d'expériences optimaux* selon des critères géométriques de remplissage de l'espace, est liée à des problèmes d'empilement de sphères (*"sphere covering"* et *"sphere packing"*).

La conception et l'analyse d'algorithmes d'approximation pour l'optimisation combinatoire utilisent de nombreux outils mathématiques, en particulier en probabilités discrètes et optimisation convexe : chaînes de Markov, fonctions de Lyapunov, martingales, programmation linéaire ou semi-définie, théorie spectrale des graphes, constante de Cheeger, inégalités isopérimétriques.

Un exemple d'interaction fructueuse entre mathématiques et informatique est la *rencontre entre la programmation semi-définie et la géométrie algébrique réelle*. La programmation semi-définie (*"semidefinite programming"*, ou encore SDP) s'est imposée vers les années 1980 comme une méthode d'optimisation dans de nombreux domaines, notamment en automatique et statistique, grâce à la floraison de logiciels, le plus souvent libres. La SDP et les logiciels associés ont ouvert de nombreuses applications aux résultats de géométrie algébrique réelle sur la représentation des polynômes positifs (Schmüdgen, Putinar) obtenus au début des années 1990. Le développement de l'optimisation polynomiale, basée sur ces résultats de géométrie algébrique, a suscité à son tour un intérêt nouveau des géomètres algébristes pour l'optimisation, et l'émergence de domaines de recherche tels que la « géométrie algébrique convexe » qui étudie par exemple la représentation d'ensembles semi-algébriques convexes par des inégalités linéaires matricielles (LMI), ce qui permet de faire du calcul effectif sur ces ensembles. Cette interaction a aussi permis d'envisager la résolution effective du problème généralisé des moments dans le cadre polynomial, avec de nombreuses applications importantes.

L'optimisation polynomiale intéresse aussi l'informatique fondamentale car elle permet de définir des hiérarchies de problèmes convexes pour une approximation efficace des problèmes d'optimisation combinatoires difficiles. Ces techniques de relaxation ont aussi montré leur efficacité pour les codes correcteurs d'erreur où elles ont permis d'améliorer les bornes de Delsarte et Lovasz, et en calcul quantique.

On peut prévoir que les avancées théoriques en analyse convexe, calcul des variations, équations aux dérivées partielles, transport optimal seront combinées avec les avancées en programmation mathématique afin de fournir aux ingénieurs des outils numériques performants.

La *théorie des jeux* s'intéresse au problème suivant d'optimisation combinatoire : un individu doit faire un choix guidé par une fonction d'utilité que l'on cherche à optimiser. On suppose souvent que seul le choix de l'individu influence son utilité. Cependant, on s'intéresse de plus en plus au cas suivant : plusieurs individus avec leur fonction d'utilité propre partagent une structure ou une ressource (par exemple un réseau). L'utilité d'un individu ne dépend plus seulement de son propre choix, mais aussi de celui des autres. Du fait des interactions, chacun doit prendre en compte les intérêts des autres pour effectuer son propre choix. La théorie des jeux, familière aux économistes et aux informaticiens, offre une base formelle pour étudier des problèmes classiques en optimisation combinatoire avec un regard neuf. Des exemples d'applications concernent l'efficacité et la sécurité des réseaux et grilles de calcul. L'un des principaux concepts en théorie des jeux non coopératifs, l'équilibre de Nash, est utilisé comme solution observée du système car il correspond à un état stable dont les individus n'ont pas intérêt à dévier. On peut alors quantifier les performances des équilibres de Nash vis-à-vis de l'optimum (dans le pire cas comme dans le cas le plus favorable car un optimum n'est pas nécessairement un équilibre de Nash). Les principales questions que les théoriciens de l'informatique se posent sont les suivantes : étudier l'existence de solutions stables ; connaître la complexité du problème visant à déterminer un équilibre de Nash (s'il en existe) et concevoir des algorithmes pour la construction de tels équilibres ; quantifier la perte de performance du système global quand on se restreint aux solutions stables.

Le développement des applications des jeux de congestion aux réseaux de télécommunication stimule l'étude des jeux non atomiques (une infinité d'agents, chacun de taille négligeable) avec paiements non multilinéaires, dont font partie les jeux à champ moyen. La théorie de l'apprentissage et la théorie des jeux d'évolution s'appliquent aux problèmes d'optimisation distribuée dynamique (par exemple, choix d'antennes pour la connexion de téléphones mobiles).

3.4. Image. En deux décennies, l'*imagerie* est devenue un domaine de recherche majeur. Les applications sont multiples et la demande sociétale forte dans des domaines aussi variés que les sciences du vivant, les neurosciences, la vision, la conception assistée par ordinateur, la physique des ondes, l'astronomie, l'élaboration de diagnostics automatiques, la détection de situations ou de comportements. Les sciences de l'imagerie posent de nouvelles questions mathématiques associées aux problèmes de formation, d'acquisition, de compression, de transmission, de modélisation, d'analyse, de traitement, d'interprétation, de restauration, d'archivage des images. Ces défis concernent plusieurs disciplines et utilisent des modèles et des outils mathématiques avancés (EDP, analyse temps-fréquence, méthodes variationnelles, géométrie différentielle, algèbre, théorie des groupes, analyse harmonique, optimisation, combinatoire, géométrie discrète,...) conjointement avec des méthodes informatiques évoluées (implémentation parallèle, algorithmes de recherche rapide dans des bases de données,...).

Les modes d'acquisition et de diffusion des images sont multiples et en constante évolution (télévision numérique HD ou 3D par exemple). Des informations et signaux aussi variés que le niveau de gris, la couleur, l'infrarouge proche ou thermique, l'imagerie à grande gamme dynamique (*"high dynamic range"*), l'imagerie multispectrale, l'imagerie par résonance magnétique de diffusion (*"diffusion tensor image"*), les signaux radar, etc., forment des *images pluriformes*. Modéliser, manipuler et traiter ces masses de données hétérogènes et multidimensionnelles (images, vidéos, surfaces, graphes) est un enjeu scientifique et socio-économique majeur. Un objectif est de bâtir un *socle théorique* (par exemple, modèles géométriques, modèles stochastiques, EDP, analyse variationnelle, analyse harmonique, groupes et variétés) qui rende compte de la complexité des données multidimensionnelles.

Nombre de problèmes en mathématiques de l'imagerie se réduisent à l'*optimisation de fonctionnelles très complexes*. Celles-ci sont le plus souvent non lisses, parfois non convexes, et toujours en très grande dimension (de l'ordre de plusieurs millions de variables). Les *méthodes statistiques* de sélection de variables ou de modèles, mais aussi le *transport optimal* commencent à être appliqués avec succès au traitement des images.

Les progrès récents dans le domaine du *débruitage* illustrent la nécessité des échanges entre les deux communautés, mathématique et informatique. Les meilleures méthodes de débruitage actuelles sont basées sur des méthodes non locales introduites en traitement d'images par la communauté informatique dans le cadre de la synthèse de texture. La réinterprétation de ces travaux et leur formalisation mathématique a permis de grandes avancées en débruitage au milieu des années 2000. La réappropriation de ce nouveau point de vue par la communauté informatique a permis un nouveau pas en avant vers 2010 avec l'algorithme BM3D qui constitue actuellement l'état de l'art en terme de débruitage.

Ces dernières années ont vu l'émergence d'une communauté de l'imagerie mathématique (*"imaging sciences"*). Cette discipline est à la croisée des chemins entre traitement d'images, mathématiques appliquées (problèmes inverses) et ingénierie. Le résultat le plus spectaculaire est sans doute l'introduction de la théorie du *"compressed sensing"* par Candes, Tao et Donoho en 2004. C'est l'une des méthodes de *régularisation des problèmes inverses en imagerie*, à l'interface de l'optimisation non lisse (algorithmes rapides qui passent à l'échelle), de l'analyse variationnelle (comprendre les performances théoriques que l'on peut obtenir avec ces approches), des EDP non linéaires (flot de gradient associé à la minimisation des fonctionnelles) et bien sûr du traitement du signal.

Un obstacle technologique très sérieux à une communication scientifique solide sur les algorithmes de traitement de données est *la babélisation des communautés* selon le type de langage et de logiciel de manipulation des images et signaux utilisés. Cette segmentation préoccupe les agences de recherche américaines et européennes qui réclament une « recherche reproductible » et ont lancé des initiatives, comme ITK pour le logiciel médical. Malgré cela, la recherche actuelle en traitement de données n'est que faiblement reproductible, puisqu'en l'absence d'un vecteur logiciel universel, c'est par le biais de conférences et d'articles dans des revues scientifiques que la communauté échange ses vues algorithmiques. Les algorithmes sont mal communiqués par du texte souvent incomplet, où des détails algorithmiques cruciaux et même les valeurs des paramètres ne sont pas spécifiées. La possibilité *d'exécuter des codes à distance sur le web* selon diverses modalités (*"cloud computing", "software as a service"*) permettra aux communautés scientifiques d'exécuter en ligne leurs algorithmes sans imposer d'environnement logiciel. Ainsi les recherches informatiques seront démontrables en ligne et universelles. L'attention des chercheurs se portera sur les algorithmes, non sur un logiciel. Par exemple, le journal en ligne IPOL www.ipol.im créé en 2011 présente une soixantaine d'articles de traitement d'images exécutables en ligne et démontre la possibilité pour les communautés d'informaticiens et de mathématiciens de produire de la recherche pleinement reproductible et testable directement sur n'importe quelle image par les lecteurs.

3.5. Signal, son, fouille de données, optimisation statistique, apprentissage, décision, traitement statistique des données. Les *sciences et technologies de la musique et du son* relèvent de nombreuses disciplines (ingénierie, sciences humaines et sociales, biologie) outre l'informatique et les mathématiques. Les interactions entre mathématiques et informatique dans ce domaine concernent en particulier l'analyse et la synthèse des sons, les représentations musicales, le calcul synchrone, la géométrie de l'information, l'acoustique instrumentale, les espaces acoustiques et cognitifs, les interactions musicales en temps réel, la théorie de la démonstration appliquée à l'étude des partitions musicales. La thématique Mathématique-Musique-Informatique est difficile à situer à l'intérieur de l'architecture traditionnelle des disciplines scientifiques. C'est une difficulté propre à la musique en tant qu'objet d'étude. Si l'étude des phénomènes musicaux relève du traitement du signal, la composante algorithmique et le lien avec les mathématiques sont deux aspects essentiels pour formaliser les structures et processus musicaux.

Le *traitement statistique du signal* s'appuie classiquement sur les progrès réalisés en algèbre linéaire et en analyse dans la seconde moitié du 20e siècle (transformée de Fourier rapide, algèbre des matrices, ondelettes,...). Depuis le début des années 2000, les progrès en théorie de l'apprentissage, statistiques bayésiennes, et sélection des modèles par exemple, ont bouleversé ce domaine. En particulier, des méthodes « géométriques » sont apparues, basées sur la géométrie différentielle et d'autres géométries (hessienne ou de Kähler, symplectique, de contact,...). Cette nouvelle famille de méthodes est regroupée sous le terme générique de *géométrie de l'information*. L'idée principale est d'analyser la structure géométrique de variété différentielle que possèdent certaines familles de distributions de probabilités qui forment alors une variété statistique.

Notons que le point de *contact entre statistique et informatique* ne se réduit pas au seul domaine du signal et de l'image. La *génomique* par exemple constitue une source de données de grande dimension. La *biologie* en général motive de nombreuses interactions entre mathématiques et informatique : systèmes complexes et graphes aléatoires pour l'étude des réseaux de gènes, systèmes dynamiques discrets, statistique en grande dimension pour la recherche de modèles prédictifs de pathologies à partir du génome, apprentissage statistique. Sans oublier les aspects algorithmique et calculatoires sous-jacents : simulation numérique, calcul parallèle, GPU.

Ainsi le *traitement des flux d'information* (réseaux), la fouille et l'assimilation de données, les méthodes d'apprentissage, l'aide à la décision sont souvent inséparables du traitement du signal. Par exemple les méthodes de simulation Monte Carlo par chaîne de Markov sont utiles pour comprendre le fonctionnement des systèmes neuronaux. Le transport optimal, la théorie des matrices aléatoires s'appliquent à des problèmes actuels d'allocation dans les réseaux, d'évaluation de performance, etc. L'*apprentissage statistique* s'appuie sur diverses théories mathématiques (processus empiriques, concentration de la mesure, grandes matrices aléatoires, optimisation convexe, systèmes neuronaux) pour construire des algorithmes qui « apprennent » à partir de données. La performance des algorithmes d'apprentissage à partir de *masses de données*, notamment par réseaux de neurones profonds, s'est remarquablement améliorée au cours des dix dernières années, avec des applications industrielles maintenant considérables. Ce domaine reste cependant très expérimental car les mathématiques sous-jacentes sont mal comprises, et nécessite un effort de recherche important.

Les *méthodes et problèmes mixtes* (discrets et continus) et les *systèmes hybrides* (systèmes dynamiques résultant de l'interaction entre des processus discrets et continus) sont abordés dans la partie IV.2 de ce rapport.

3.6. Calcul haute performance, modélisation, équations aux dérivées partielles, simulation.
Le calcul haute performance (HPC) est un outil nécessaire aux mathématiques et à leurs applications. À l'inverse, d'intéressantes questions mathématiques sont soulevées par les nouvelles technologies pour le calcul scientifique (architectures multicœurs, coprocesseurs) voire les architectures hybrides (*"exascale computing"*). Par exemple, le besoin de techniques de parallélisation (*"scalability"*) très performantes concerne une grande variété de domaines : modélisation, analyse numérique, algorithmique, solveurs numériques. Les problèmes énergétiques rencontrés par les calculateurs intensifs (*"power wall"* pour le HPC) requièrent d'optimiser les méthodes numériques en termes de performances, mais aussi de consommation énergétique de ces ordinateurs. Les problèmes de non-fiabilité du matériel, en particulier pour les machines exa (*"exascale computing")* sont eux aussi mathématiques. Le *"dependable computing"* tente de prendre en compte ces incertitudes.

La simulation numérique d'un *plasma de tokamak* est un exemple représentatif des questions soulevées par le HPC. Le réacteur expérimental ITER est actuellement en construction à Cadarache. Le but de ce projet est de reproduire sur la Terre les réactions de fusion thermonucléaire qui se produisent à l'intérieur du Soleil. À cette fin, un plasma d'hydrogène est chauffé à très haute température (environ cent millions de degrés) dans un dispositif en forme de tore appelé *tokamak*. Le plasma « flotte » dans le tokamak sans toucher ses bords grâce à un puissant champ magnétique de confinement. La simulation numérique d'un plasma de tokamak est un défi considérable. En effet, l'équation qui régit le plasma est posée dans un espace des phases à 7 dimensions. Le calcul complet, même par un superordinateur, est actuellement impossible. Les physiciens ont donc proposé de nombreux modèles simplifiés. Les mathématiciens appliqués essayent depuis plusieurs années de justifier ou d'étendre ces modèles simplifiés. Ils construisent aussi des schémas numériques d'approximation de plus en plus performants. Enfin, ils collaborent avec des informaticiens spécialistes de l'optimisation des calculs sur les nouveaux ordinateurs massivement multicœurs. Les questions posées sont nombreuses et passionnantes : comment choisir et coupler les modèles mathématiques les plus pertinents pour un régime de tokamak ? Comment paralléliser les calculs et communiquer des volumes de données gigantesques entre les dizaines de milliers de processeurs d'un supercalculateur ? Comment compresser, stocker et exploiter ces données ? La réponse à ces questions ne peut pas s'envisager sans une recherche pluridisciplinaire, faisant intervenir des ingénieurs, des physiciens, des mathématiciens et des informaticiens.

4. Interactions avec les sciences du vivant

4.1. Introduction. L'intérêt des mathématiciens pour les sciences du vivant est ancien et riche de nombreux concepts : lois de Bernoulli, équations de Lotka-Volterra, processus de la génétique des populations, modèle d'Hodgkin-Huxley, instabilité de Turing en sont des exemples. Toutefois, en France, les interactions entre mathématiques et sciences du vivant ne sont en plein essor que depuis quelques années. Selon une enquête[9] réalisée par l'INSMI en 2010, plus d'un quart des interactions recensées des mathématiques avec les autres disciplines concernaient les sciences du vivant (278 sur 1002), la répartition entre biologie et médecine-santé étant à peu près égale. Plus globalement, les sciences du vivant interagissent avec la physique, la chimie, l'informatique et les mathématiques.

Les autres interfaces des mathématiques (celle avec la physique est très ancienne) ont des règles de fonctionnement bien rodées. Par contre, les interactions avec les sciences du vivant ne sont pas encore bien établies, et leur fonctionnement reste pour la plupart empirique. L'objectif idéal serait de rendre l'interface mathématiques/sciences du vivant aussi féconde et structurée que celle entre mathématiques et physique.

Tous les domaines des mathématiques sont concernés par cette interface. Les plus visibles actuellement sont la statistique avec des données de plus en plus conséquentes, les probabilités, les systèmes dynamiques, les équations différentielles et aux dérivées partielles déterministes ou stochastiques, l'optimisation au sens large, l'imagerie, le traitement du signal, mais aussi le calcul scientifique à haute performance, la géométrie, les mathématiques discrètes. Les domaines des sciences du vivant concernés sont, là aussi sans être exhaustif, la biologie cellulaire, systémique et du développement, la génomique, les neurosciences, la génétique des populations, l'écologie, la phylogénie, l'épidémiologie, la bio-informatique, etc.

Après une caractérisation des interactions entre les mathématiques et les sciences du vivant, nous évoquerons différents travaux en cours et à venir de manière non exhaustive ; il est en effet impossible d'illustrer tous les domaines d'un si vaste champ d'application. Enfin nous terminerons par quelques pistes pour conforter ces interactions en plein devenir.

[9] *Les interactions pluridisciplinaires des mathématiques*, rapport de P. Dehornoy *et al.*, INSMI, CNRS, 2010.

4.2. Spécificités et attentes de l'interface mathématiques-sciences du vivant. Un projet à l'interface mathématiques-biologie est réussi lorsqu'il apporte d'une part une réponse qualitative (et quantitative si possible) à une question théorique formulée par le biologiste, et d'autre part des problèmes originaux en mathématiques. De même que le livre de Darwin a généré toute une partie des probabilités et de la statistique, les mathématiciens font aujourd'hui face à des champs théoriques nouveaux, des problèmes qui réclament la création de nouveaux objets mathématiques, une analyse inédite, des conjectures et parfois des solutions. Au-delà d'une activité de modélisateurs (utiliser les mathématiques existantes dans un contexte pertinent), les mathématiciens peuvent apporter aux biologistes une manière complémentaire de penser.

La modélisation mathématique peut permettre au biologiste de valider ou réfuter des hypothèses, décrire, prévoir, expliquer les phénomènes qu'il étudie, comprendre les paramètres qui entrent en jeu, leur importance relative, etc. Le biologiste dispose éventuellement d'un outil numérique adapté à sa problématique. Voici un exemple : grâce aux évolutions récentes de la biologie, des données dynamiques extrêmement intéressantes suscitent des modèles mathématiques (auparavant les données concernaient surtout des états stationnaires) ; l'acquisition d'images en microscopie et de marquage de protéines permettent d'obtenir des films très détaillés de leur distribution spatiale et temporelle.

A cette interface ont lieu de plus en plus de collaborations avec des biophysiciens ou des biologistes théoriciens qui ont une connaissance approfondie des outils mathématiques. Une bonne interaction est alors celle où le biologiste présente des expériences et formule des problèmes, où le physicien propose un modèle, et où le mathématicien l'approfondit, fait des simulations numériques et suggère des analogies avec d'autres problèmes ayant un formalisme proche en termes mathématiques, et finalement il y a un retour vers les sciences du vivant des problèmes que s'est approprié le mathématicien.

Les médecins n'attendent pas la même chose des mathématiciens que les biologistes. Un projet à l'interface mathématiques-médecine est réussi lorsqu'un médecin demandeur de méthodes analytiques dialogue avec un mathématicien alors à même de confronter, pour mieux les orienter, ses idées, outils et modèles à des données de patients. Le médecin peut ensuite remettre en question les méthodes et protocoles cliniques, et réfléchir avec le mathématicien à une meilleure administration des traitements. Il s'agit de développer des modèles patient-dépendants, et les méthodes afférentes. Par exemple, en cancérologie, des modèles mécanistes pour l'action couplée d'une chimiothérapie et d'un anti-angiogénique ; des statisticiens travaillent en recherche clinique, en pharmaco-vigilance et pharmaco-épidémiologie sur des bases de données de grande dimension (par exemple des paramètres de modèles de croissance tumorale sont estimés par des méthodes statistiques populationnelles afin d'optimiser les traitements). De façon complémentaire, pour des représentations individuelles, et non seulement populationnelles, de la physiologie et de la physiopathologie, le mathématicien peut avec le médecin poser les bases d'un problème de contrôle optimal, en fournir une solution théorique prenant en compte les contraintes de la clinique, et finalement proposer des stratégies qualitatives de traitements (*cf.* la partie IV.2), comme des associations de médicaments, de médicaments et de biothérapies, de médicaments et de radiothérapie, etc. Ici le patient est représenté comme un système dynamique porteur de régulations intrinsèques - défaillantes dans les maladies - et contrôlable de manière optimisable par des traitements adaptés : cette approche est amenée à se développer dans un futur très proche.

Enfin, ces interactions ont une portée sociétale. Certains projets impliquent la production de logiciels, du biomimétisme, des partenariats industriels (citons à l'interface des mathématiques appliquées, de l'informatique et de la physique, un projet de développer un protocole complet pour la création d'angiographies virtuelles des réseaux vasculaires cérébraux (*cf.* la partie V.1).

4.3. Travaux à l'interface. Dans ce qui suit nous développons, de façon non exhaustive, quelques aspects des travaux à l'interface entre mathématiques et sciences du vivant afin de mettre en lumière les apports de différents domaines des mathématiques et les défis à relever.

La modélisation mathématique s'attelle à une approche phénoménologique et à la construction de modèles « mécanistes » : il faut simplifier un phénomène pour le mettre en équations, faire émerger des lois et des paramètres clés à partir de jeux d'hypothèses réduits.

Nous renvoyons aux parties sur les interactions des mathématiques avec d'autres disciplines, où sont développées de nombreuses applications aux sciences du vivant, entre autres les travaux en imagerie (*cf.* la partie IV.3.4).

La statistique joue depuis toujours un rôle essentiel à l'interface avec les sciences du vivant (épidémiologie, pharmacologie, traitement statistique de signaux médicaux, réduction de dimension, modélisation des données environnementales). Nous renvoyons à la section « Statistique » de la partie III.9 pour l'importance de l'utilisation et de l'analyse de données massives, les méthodes d'acquisition de données (techniques de séquençage entre autres) ayant fait des progrès considérables ces dernières années en biologie. Voici un autre exemple : l'imagerie cérébrale permet d'identifier les zones du cortex activées lors d'une stimulation donnée ; mais les méthodes statistiques utilisées pour en extraire l'information fonctionnelle restent rudimentaires faute de gestion du volume de données.

Le recours aux mathématiques et à l'informatique est indispensable pour l'analyse de réseaux de plus en plus grands, complexes et hétérogènes, d'autant plus lorsque les données quantitatives et les connaissances précises des processus étudiés se font rares. Par exemple, les grands réseaux de régulation génétique contrôlent des processus cellulaires essentiels (prolifération, différentiation, etc.) Leur modélisation par des formalismes discrets (modélisation logique, combinatoire, modèles stochastiques de graphe) et l'analyse de leurs propriétés dynamiques permettent de mieux comprendre le rôle des combinaisons de circuits dans la dynamique, d'étudier des méthodes de réduction de modèle, ou de compression de graphe préservant des propriétés essentielles pour le biologiste. Voici un exemple : comment identifier les gènes impliqués dans l'acquisition de traits phénotypiques complexes ? En effet les gènes n'interviennent pas individuellement, mais interagissent au sein de modules fonctionnels dont la détermination nécessite de tenir compte de différents types de mesures « omiques ». De telles analyses génèrent un réseau d'interactions par type de mesure, chacun d'entre eux apportant une information biologique différente et complémentaire sur la façon dont les gènes interagissent au cours du fonctionnement cellulaire.

Les progrès remarquables du calcul scientifique et haute performance (calcul parallèle, décomposition de domaine algébrique,...) viennent à point nommé pour les problèmes de taille de plus en plus grande auxquels sont confrontés les biologistes. Les simulations et études théoriques des modèles peuvent motiver et guider de nouvelles expériences (par exemple dans les travaux récents sur le mouvement individuel ou collectif des cellules et des bactéries), et apporter des économies significatives de temps et d'argent : interpréter les données biologiques en identifiant les paramètres à retenir fournit une façon compacte et exploitable de stocker l'information (par exemple les données médicales de chaque patient) ; à terme, une fois les modèles validés, l'étude numérique et le calcul scientifique devraient permettent de réduire le nombre d'expériences à réaliser. Citons un projet en cours de modélisation des écoulements sanguins dont l'ambition à long terme est de proposer à la communauté médicale une plateforme complète pour mener des expérimentations *in silico*, donnant accès à des informations difficiles, voire impossibles à obtenir autrement.

L'électrophysiologie cardiaque est un exemple d'utilisation de la géométrie : des invariants géométriques synthétisant la géométrie du cœur, vu comme une variété non euclidienne, sont développés pour caractériser la physiologie cardiaque normale et anormale (arythmies cardiaques).

La biologie des systèmes couvre maintenant toutes les échelles et va de la molécule au vivant dans son intégralité, en passant par la cellule et le tissu. Les mathématiciens proposent un cadre conceptuel pour une modélisation multi-échelle dans le temps, l'espace, les différents niveaux du vivant ; ceci inclut des modèles qui se déclinent à plusieurs étapes du vivant. Il s'agit d'étudier des modèles biologiques de l'échelle de la cellule à l'échelle d'un organe.

En éco-évolution, les modèles récents intègrent des caractéristiques génétiques dans les dynamiques de populations et sont basés sur les comportements individuels, dont par des changements d'échelle on peut déduire différentes approximations en fonction du contexte écologique, des contraintes de ressources et des variabilités de l'environnement. Il est alors important d'expliquer les différentes échelles de temps, des mutations génétiques aux grandes échelles de l'évolution. Ces modèles permettent soit de prédire le futur et de comprendre les extinctions et diversification d'espèces, soit de reconstruire le passé et d'expliquer l'histoire de la biodiversité en étudiant de manière statistique les arbres de phylogénies.

Les outils mathématiques de changements d'échelle, en particulier en probabilités, EDP ou analyse numérique, permettent le passage de dynamiques microscopiques stochastiques ou déterministes (le niveau « individu centré ») à des EDP au niveau macroscopique, via des modèles de champ moyen, des systèmes de particules en interaction, des modèles cinétiques, des systèmes d'équations couplées linéaires ou non. Les outils des problèmes inverses permettent de calibrer les modèles mathématiques sur les expériences et permettent un retour vers les biologistes pour des modèles directement exploitables par ceux-ci. Citons quelques exemples :

- un modèle cinétique (modèle hydrodynamique issu de la théorie des mélanges) pour l'auto-organisation des colonies de bactéries par chimiotactisme, validé sur des données expérimentales, motivé par la modélisation des biofilms (un biofilm est un mélange complexe de micro-organismes englobés dans une matrice extra-cellulaire, produite par les organismes eux-mêmes, et colonisant une surface), et la lutte contre les maladies nosocomiales ;
- des modèles infini-dimensionnels de branchement pour étudier les caractéristiques de la cellule lors de la division cellulaire (âge et dommages de la cellule, nombre de virus,...) ; des études statistiques pour estimer de manière adaptative les taux de division et de mort des cellules en fonction des paramètres commencent à se développer ;
- un modèle de migration de cellules endothéliales sur des substrats attractifs couplant des équations du chimiotactisme posées sur deux domaines différents : les parties adhésives (peptides) et les parties non adhésives, afin de comprendre la migration et la répartition finale des cellules ;
- des modèles markoviens multitypes (branchements, processus de compétition) pour des questions de pathologie végétale ; des modèles stochastiques de reconstruction de graphes appliqués en reconstruction phylogénétique ;
- des modèles mathématiques et numériques multi-échelles depuis l'organe (par exemple, bronches) jusqu'à la cellule (typiquement le globule rouge) pour les échanges d'oxygène à la barrière air/sang et les réactions chimiques entre l'oxygène et l'hémoglobine dans le globule rouge.

La modélisation en neurosciences fait appel à des domaines mathématiques très variés et fait apparaître de nouveaux questionnements posés par la biologie d'ordre plus global, concernant par exemple aussi les modèles modernes d'éco-évolution ou de biologie systémique. C'est pourquoi nous en détaillons différents aspects.

Citons, pour l’activité neuronale unitaire ou l’activité de réseaux de neurones :

- des méthodes statistiques d’analyse par des processus ponctuels ;
- des modèles non linéaires par des systèmes dynamiques hybrides (théorie des bifurcations), les ondes de propagation de pulse, complétées par l'étude d'un point de vue numérique.

La dynamique de l’activité neuronale globale relève des « systèmes complexes », que le *New England Complex Systems Institute* définit ainsi : *"Complex systems are systems with multiple interacting components whose behaviour cannot be simply inferred from the behaviour of the components."* En effet, la phénoménologie de systèmes isolés peut être extrêmement différente de celle d'un très grand nombre de ces systèmes en interaction, même faible. Les interactions peuvent induire de nouvelles caractéristiques dans le système global. Ce phénomène d'émergence, omniprésent en biologie, est encore très peu compris mathématiquement. Par exemple, comment expliquer que des comportements collectifs, comme des déplacements coordonnés d'espèces grégaires, émergent d'interactions locales entre individus (pistes chez les fourmis, bancs de poissons, troupeaux de moutons…) ?

Citons plusieurs approches pour la dynamique neuronale :

- La mécanique statistique hors équilibre (*cf.* la partie IV.1) : ce cadre est naturel pour tout système avec un très grand nombre de composants, d'autant plus lorsque le bruit joue un rôle clé. Une première étape est d'établir l'origine de comportements périodiques à partir de systèmes bruités pour lesquels, en l'absence d'interaction, aucune périodicité n'est présente : celle-ci émerge comme effet coopératif de la non-linéarité et du bruit, dans la limite d'un très grand nombre de systèmes en interaction. Cette partie est exemplaire des différences notables entre les questions et approches venant de la physique ou des sciences du vivant : par exemple, la taille globale d'unités en interaction aussi bien que le réseau associé aux interactions peuvent varier au cours du temps (réseaux de neurones..) ; les interactions peuvent ne pas être instantanées, par exemple suite à une médiation chimique (chimiotactisme, synapses...).
- Des équations implicites de type McKean-Vlasov, qui décrivent le comportement collectif de neurones. Elles se réduisent à un système d'équations différentielles déterministes où le bruit constitue un paramètre ; il apparaît par exemple dans l'émergence d'activité rythmique.
- Des modèles de champ moyen décrivant les réseaux connectés de type « intègre-et-tire » (ce modèle simplifié du neurone a été introduit par Louis Lapicque en 1907).
- Des modélisations et simulations informatiques biologiquement plausibles ayant pour but de comprendre la mise en place de la dynamique neuronale. Par exemple des modèles statistiques adaptés cherchent à estimer des graphes d'interactions fonctionnelles entre deux régions du cerveau (comme le thalamus et le cortex dans le cadre de comportements sensorimoteurs), établis à partir de l'enregistrement de l'activité unitaire d'un grand nombre de neurones. De telles études peuvent déboucher sur l'implémentation en robotique ou dans le cadre d'interfaces homme/machine (cf. la partie IV.2)

4.4. Pistes pour renforcer l'interface. Les mathématiques et les sciences du vivant ont un fonctionnement propre très différent. Les échelles de temps, la notion même de ce qu'est un résultat, le besoin de publier rapidement ne sont pas les mêmes ; la durée de vie ou de pertinence d'un résultat en sciences du vivant peut être courte, et contraste avec celles de théorèmes pérennes en mathématiques. Les moyens financiers nécessaires aux fonctionnements respectifs des deux disciplines sont aussi sans commune mesure. Enfin il existe une disparité entre le réseau des laboratoires de mathématiques, dense et bien réparti sur le territoire français et celui des laboratoires de biologie, plus centrés autour de quelques pôles.

Il y a actuellement de nombreux freins à l'établissement et la pérennisation de l'interdisciplinarité entre sciences du vivant et mathématiques. Il faudrait un soutien institutionnel, des moyens et des démarches systématiques pour que l'école mathématique française, déjà résolument impliquée, comble dans cette interface son retard sur l'étranger, où on peut voir des mathématiciens de formation occuper des positions de professeur ou être à la tête d'instituts de recherche en biologie ou santé.

Les nombreuses et fructueuses collaborations existantes résultent généralement d'initiatives individuelles. Il faut les valoriser, mais aussi et surtout *structurer ce paysage interdisciplinaire*, pour éviter d'avoir en parallèle des travaux dans des directions analogues ou complémentaires, ou que seuls quelques domaines émergent, pas seulement par leur pertinence, mais comme le reflet de ceux qui les auront mis en place. Il faut intensifier les synergies entre différents domaines des mathématiques, par exemple probabilités, statistique, systèmes dynamiques et EDP. Il faut que les mathématiques trouvent leur place là où d'autres disciplines sont déjà présentes, par exemple autour des systèmes complexes.

Des lieux et des rencontres institutionnels pérennes et dédiés, comme on peut en trouver à l'étranger, permettraient de systématiser l'amorce de collaborations et de provoquer des interactions. Les biologistes y trouveraient les mathématiques dont ils ont besoin, et les mathématiciens, ne connaissant que partiellement les problèmes issus de la biologie, identifieraient des modèles ou outils utiles à la biologie. Pourraient aussi s'y retrouver des mathématiciens travaillant à l'interface avec les sciences du vivant.

5. Interactions avec la chimie

Les applications des mathématiques à la chimie impliquent quasiment tous les champs des mathématiques. Dans les dernières décennies, la chimie théorique s'est fortement orientée vers les simulations numériques, nécessitant ainsi l'appui d'outils mathématiques à la fois en analyse (les équations simulées sont des équations aux dérivées partielles), en probabilités (pour l'étude des grands systèmes ou des systèmes très complexes), en algèbre (par exemple avec le formalisme tensoriel) et en informatique théorique (avec notamment le développement des ordinateurs quantiques, naturellement adaptés à la simulation moléculaire).

L'analyse a sans doute été le premier domaine à jouer un grand rôle en chimie, avec l'étude des équations et des modèles décrivant les atomes et les molécules au niveau microscopique. Elle a été fortement propulsée à l'avant-scène en France par le groupe de P.-L. Lions, ainsi que par ses anciens étudiants et émules. Les sujets se sont beaucoup diversifiés ces dernières années et de nombreux problèmes sont en plein essor. Portés vers la chimie quantique à l'origine, ils ont débordé sur la mécanique moléculaire, la modélisation des solvants et des cristaux, la théorie du contrôle, les méthodes multi-échelles, et l'utilisation de méthodes probabilistes de type Monte-Carlo, allant au-delà de la stricte analyse. Un exemple porteur est celui de l'étude des modèles relativistes (basés sur l'opérateur de Dirac) qui sont activement développés par les chimistes en ce moment, et pour lesquels les mathématiciens peuvent jouer un rôle déterminant.

Mentionnons également que la contribution de l'analyse associée à la géométrie pourrait être importante pour la modélisation et la prédiction des structures secondaires et tertiaires des protéines et autres macromolécules biologiques, problème scientifique crucial au carrefour des mathématiques, de la chimie et des sciences du vivant.

Deux autres thèmes non sans rapport l'un avec l'autre ont fortement émergé ces cinq dernières années, même si l'on peut en trouver des ébauches antérieures, et devraient continuer à prendre de l'ampleur. D'une part, on peut citer les applications de la théorie de la complexité à la chimie. La résolution du problème $P = NP$ aurait d'énormes conséquences en chimie théorique, où même des méthodes de première approximation comme la méthode de Hartree-Fock s'avèrent être « *NP*-complets ». L'étude de la complexité des problèmes de la chimie va surement s'étendre, mais audelà de ces travaux purement théoriques il est important d'anticiper l'arrivée des simulateurs quantiques (parfois un peu abusivement dénommés « ordinateurs quantiques adiabatiques ») qui sont parfaitement adaptés à la résolution de nombreux problèmes de chimie. On peut à moyen terme prévoir une grande mutation de toute la chimie « computationnelle » avec l'arrivée de ces nouvelles machines sur le marché (déjà commercialisées par la société *D-Wave Systems*, mais controversées et à des prix prohibitifs pour l'instant). Le développement de méthodes algorithmiques adaptées à ces outils devrait être une piste de recherches à ne surtout pas négliger.

D'autre part, la décomposition et l'interpolation de tenseurs a suscité beaucoup d'intérêt récemment en mathématique, tout d'abord avec des préoccupations assez éloignées de la chimie, principalement en traitement du signal ou en analyse de données statistiques. Leur développement en chimie est finalement assez récent. Les premiers travaux ont été obtenus en Allemagne dans les cinq dernières années et on peut penser qu'ils se développeront davantage dans les années à venir. Plusieurs nouvelles méthodes de chimie quantique basées sur la compression de l'information d'une fonction d'onde électronique, objet qui peut être mathématiquement vu comme un tenseur antisymétrique, sont en plein essor.

Le développement de la théorie des groupes en chimie ne doit pas occulter les nombreux autres outils algébriques qui ont été mis à contribution dans ce domaine. Aujourd'hui, on peut observer, outre les algèbres tensorielles déjà évoquées, un regain d'intérêt envers la théorie « computationnelle » des invariants, qui va au-delà de la théorie des groupes traditionnelle. Un problème à résoudre est typiquement la détermination de bases d'intégrité pour des modules Cohen-Macaulay, mais il peut aussi faire apparaître des modules non libres pour lesquels de nouveaux développements mathématiques semblent nécessaires.

Mentionnons également quelques domaines traditionnels s'appliquant de façon évidente à la chimie. La théorie des graphes, pour laquelle la structure des molécules est une source d'inspiration ancienne, continue d'être active aux interactions mathématiques-chimie, même si les découvertes récentes sur les molécules d'acides nucléiques ont plutôt mis en relief des applications spectaculaires de la théorie des nœuds. Une voie de recherche permettant de renouveler ce domaine consiste sans doute à ne plus considérer une molécule comme un ensemble seulement de vertex (les noyaux atomiques) et d'arêtes (les liaisons chimiques, dont la définition quantique reste problématique), mais d'inclure aussi les spins électroniques et leurs couplages. L'étude des topologies possibles des densités de spin moléculaire pourrait alimenter de tels travaux.

La combinatoire, domaine transdisciplinaire s'il en est, est susceptible d'intervenir dans de nombreux problèmes issus de la chimie au fil de leur émergence. Il apparaît régulièrement de nouveaux problèmes qui s'articulent autour de la théorie des graphes. Il s'agit typiquement d'énumérer des sous-graphes (fragments moléculaires) ayant telle ou telle propriété ou de comparer deux ou plusieurs graphes (structures moléculaires) selon des critères pertinents. Mais les techniques combinatoires font aussi progresser les approches quantiques. Par exemple, la théorie des perturbations (application allant au-delà de la chimie, mais l'incluant en particulier) a déjà bénéficié des techniques des algèbres de Hopf combinatoires et l'on peut estimer que ces développements se poursuivront.

En conclusion, les interactions entre les mathématiques et la chimie sont variées et font intervenir des branches des mathématiques très diverses. Aucune ne doit être négligée.

6. Mathématiques pour la Planète Terre

Plus d'une centaine de sociétés savantes et de centres de recherche ont été partenaires de l'initiative mondiale « Mathématiques de la planète Terre 2013 » (MPT2013), dont le but est de faire progresser la recherche sur des enjeux planétaires et notamment de montrer le rôle essentiel des mathématiques dans la recherche de solutions aux problèmes complexes qui se posent à notre planète. En France il s'est constitué un atelier de réflexion prospective, l'ARP « MathsInTerre », financé par l'ANR, hébergé par l'IHP et soutenu par l'INSMI. Nous empruntons au rapport de synthèse[10] de l'ARP les réflexions et les propositions suivantes.

« Nous devons faire face à des changements globaux environnementaux et sociétaux toujours plus rapides. Répondre à ces nouveaux défis impose de prendre en considération des systèmes très complexes, où l'impact des activités humaines ne peut pas être négligé et où les processus sont fortement hétérogènes : multi-échelles et multi-processus. » « Les besoins en mathématiques apparaissent particulièrement lorsqu'il s'agit de gérer les interactions. Par exemple, les différentes échelles de temps sont à prendre en compte en écologie théorique, dans le cas des dynamiques écologiques et évolutionnaires ou pour la représentation des différentes échelles de la biodiversité. » « Les écoulements de fluides complexes, que ce soient les gels ou les milieux granulaires, ont aussi des comportements difficiles à modéliser. [...] ils ne peuvent pas être traités par la physique statistique classique, car ils ne vérifient pas le second principe de la thermodynamique. Les mathématiques qui ont beaucoup contribué à la physique statistique pourraient apporter de nouveaux théorèmes et de nouveaux modèles. » « Comprendre les phénomènes passent aussi

[10] *Mathématiques et complexité du système Terre*, Rapport de synthèse de l'Atelier de réflexion prospective MathsInTerre, Agence National de la Recherche, 2014.

par l'analyse des données [...] par exemple, extraire la dynamique des structures cohérentes des images satellites requiert des avancées sur l'interpolation optimale dynamique, le traitement d'image et l'assimilation de données, ainsi que de nouveaux outils d'analyse géométrique. »

Ces défis appellent des collaborations entre les mathématiciens et des chercheurs d'autres disciplines. Pour favoriser les interactions et susciter de réels projets multidisciplinaires, l'ARP fait les propositions suivantes.

- Organiser des groupes de travail multidisciplinaires avec une forte participation de jeunes chercheurs ; ces groupes de travail de courte durée pourraient être hébergés au CIRM ou à l'IHP.
- Lancer des appels d'offre pour des projets MPT liant recherche fondamentale et recherche appliquée dans le but d'identifier des problématiques et d'y associer des communautés au sens large.
- Financer des chaires bilatérales pour deux chercheurs reconnus dans leur discipline respective et désireux de s'investir dans des travaux demandant une double compétence[11].
- Apporter un soin particulier à la constitution de jurys de sélection et d'évaluation pour bien prendre en compte la pluridisciplinarité.
- Favoriser la création d'équipes ou de laboratoires multidisciplinaires[12] ; ces projets d'envergure nécessitent un financement sur un temps long.

V. RELATIONS AVEC LES ENTREPRISES

Dans ce chapitre nous traitons des relations des mathématiques avec deux domaines d'activité extérieurs au monde de la recherche, à savoir l'industrie et la finance.

1. Relations avec l'industrie

Un ensemble de réflexions menées depuis quelques années par la communauté des mathématiciens en France, notamment sous l'impulsion des sociétés savantes, en Europe et aux Etats-Unis a mené en 2011 à la création de l'Agence pour les mathématiques en interaction avec l'entreprise et la société (AMIES). Cette agence a deux objectifs principaux :

- proposer et soutenir des programmes, en formation et recherche, visant à une meilleure interaction des mathématiciens avec les entreprises,
- offrir aux entreprises, aux chercheurs et aux étudiants une visibilité des opportunités qui existent dans ce domaine.

Au-delà de cette initiative importante, il faut se demander quels sont les problèmes de fond en mathématiques qu'il serait nécessaire et souhaitable d'attaquer dans le domaine des relations avec les entreprises.

Dans ce domaine, qui est par nature multiforme et mouvant, il est difficile de répertorier des thématiques spécifiques amenées à se développer de manière privilégiée et autonome. Les entreprises qui évoluent sur les sujets brûlants du moment ont d'abord besoin d'intelligence pour donner des réponses ne se trouvant pas « sur étagère » ou sur Internet. Or le propre des mathématiciens est précisément de savoir aborder la complexité. Les efforts de mise en relation doivent surtout viser les PME, qui ne savent en général pas où trouver les compétences mathématiques dont elles ont besoin. Elles connaissent mal les formations mathématiques et ont souvent peu de contact avec le milieu scientifique. Or les PME ont en général des besoins en expertise à la fois poin-

---

[11] Comme par exemple la Chaire « Modélisation mathématique et biodiversité » (École Polytechnique, Muséum National d'Histoire Haturelle, Véolia environnement).

[12] De tels laboratoires existent déjà en France, comme le Laboratoire transdisciplinaire Joliot-Curie à l'ENS de Lyon, le Centre interdisciplinaire de recherche en biologie au Collège de France, le Centre de Mathématiques Appliquées de Sophia Antipolis (Ecole des Mines) avec sa chaire « Modélisation prospective au service du développement durable ».

tus et rapidement mobilisables : statistique et traitement des données, simulation numérique, optimisation, traitement et analyse d'images, etc.

Les attentes que l'on perçoit de la part des entreprises montrent que ce sont plutôt les aspects pluri-disciplinaires, y compris à l'intérieur des mathématiques, qui deviennent les plus critiques et qui demanderont une attention particulière des institutions et des acteurs.

On peut en donner deux exemples. Ils correspondent en fait à des sujets brûlants, très médiatisés, dans les interactions entre le monde académique et l'industrie : le *Big Data* (« grandes masses de données ») et le *HPC* (*"High-performance computing"* ou « calcul à haute performance »).

Dans le domaine du *Big data*, au-delà du phénomène de mode, il y a de réels enjeux mathématiques, susceptibles de mobiliser des ressources, pour une même application, dans des domaines aussi variés que la géométrie, la statistique, l'analyse et l'optimisation. Sur ce sujet, des mathématiques très fines doivent être déployées pour améliorer et accélérer la représentation ou le traitement des données.

Dans le domaine du *HPC*, des disciplines comme le calcul scientifique pour ce qui concerne la modélisation, l'algorithmique et le génie logiciel pour les questions liées aux nouvelles architectures multi-cœurs, et la statistique pour les questions d'incertitude et de validation des résultats de simulation, doivent pouvoir être mobilisées pour apporter des réponses rapides, notamment à des PME qui n'ont souvent aucune familiarité avec le domaine.

Contrairement à certaines idées reçues, les mathématiciens sont immédiatement compétents dans ces domaines. Ils sont en effet capables de s'adapter à de nombreux environnements : non seulement leur formation les a souvent confrontés aux diverses applications des mathématiques, mais ils ont une très bonne pratique et connaissance de l'informatique. Autres prédispositions essentielles pour mener à bien des projets dans des délais courts : les mathématiciens travaillent avec méthode et rigueur ; ils savent prendre du recul par rapport aux problèmes posés et ont la capacité d'évaluer la validité des solutions proposées.

La proximité traditionnelle des mathématiciens avec l'ingénierie dans le domaine de la simulation numérique, et avec l'informatique dans le domaine des données, sont certainement des atouts pour leur permettre d'occuper une place centrale dans ces sujets. La culture de réseau des mathématiques françaises, notamment à travers le CNRS, est un autre atout pour répondre à ces défis pluridisciplinaires, mais il faudra y ajouter une forte incitation pour développer des formations pluridisciplinaires adaptées à ces défis, peut-être en s'appuyant sur la labellisation des cursus Master en Ingénierie (CMI).

Loin de l'image classique des mathématiques comme simple outil de sélection, nous devons convaincre étudiants et entreprises du fait que les mathématiciens disposent d'un bagage opérationnel déterminant dans l'émergence de technologies innovantes.

Enfin, comme cela a déjà été dit, un enjeu critique nous paraît être la valorisation des activités à l'interface mathématiques-entreprises, notamment dans la carrière des chercheurs et enseignants-chercheurs. C'est un sujet récurrent qui doit maintenant avancer. Sans de véritables incitations il sera difficile de motiver les chercheurs pour le travail non seulement de collaboration, mais aussi de prospection qui est indispensable à de véritables transferts. Des quotas de promotion ou des délégations CNRS réservées pour ce type d'activité dans les laboratoires seraient sûrement des signaux à forte portée symbolique et relativement faciles à mettre en œuvre. Une réflexion sur le statut de mathématiciens en entreprise et sur leur mise en réseau serait aussi très utile.

2. Mathématiques financières

La crise de 2008 a marqué un tournant dans les mathématiques financières. La notion de risque, qui avait été quelque peu occultée pendant les années de boom, est revenue au premier plan. Le monde de Black et Scholes (plus exactement l'hypothèse de complétion d'un marché), où l'on peut s'assurer contre tout risque, est différent du monde réel où certains risques ne peuvent pas être totalement couverts par le marché. Les modèles étudiés actuellement ne se contentent pas de calculer « un prix » (l'espérance conditionnelle d'une quantité sous une probabilité donnée) et portent sur deux problématiques : donner des bornes aux prix des produits étudiés, si possible indépendantes du choix de la probabilité dans un ensemble fixé, et tenir compte de l'incertitude sur la probabilité dite historique (robustesse des prix). Ceci a conduit à l'introduction et au développement de méthodes de transport optimal et d'analyse stochastique quasi-sûre.

La gestion de portefeuille et le management des entreprises se ramènent traditionnellement à des problèmes de contrôle optimal stochastique. La prise en compte des risques conduit à des problèmes de contrôle avec des contraintes d'un type nouveau que l'on ne trouve pas dans le cas des systèmes physiques. On rencontre, par exemple, des problèmes de contrôle optimal stochastique avec une relation entre la variable adjointe et la variable d'état, ou des problèmes de calcul des variations avec des contraintes de convexité (on optimise, non sur l'ensemble de toutes les fonctions satisfaisant les données au bord, mais sur celles qui sont convexes). Ces mêmes problématiques ont conduit à de nouveaux développements dans le domaine des cibles stochastiques (sous contrainte de moment, sous forme de jeux différentiels stochastiques, etc.), qui en soi conduisent à une nouvelle classe de problèmes de contrôle stochastique ou d'équations différentielles stochastiques rétrogrades. Cet intérêt nouveau pour le risque, tant de la part des régulateurs qui cherchent à éviter une nouvelle crise que de la part des banques qui cherchent à gérer les fonds propres, conduit à une meilleure compréhension des types de risque existant sur le marché. Nous pouvons citer l'effet de contagion qui se manifeste (effet qui a été sous-estimé lors de la crise), le risque systémique (dans le réseau financier, une perturbation locale peut-elle se propager au point de déstabiliser tout le système ?), le risque de liquidité (peut-on éviter des situations où les titres ne trouvent pas preneur ?) qui sont devenus des thèmes majeurs et nécessitent de nouvelles méthodes de contrôle optimal. Le risque de contrepartie (risque de défaillance de l'acheteur/vendeur de protection) doit également être pris en compte, et les équations différentielles stochastiques rétrogrades se révèlent un outil efficace.

D'autre part, dans les études pré-crise, il était admis qu'il existait un taux d'intérêt unique auquel les banques et les investisseurs peuvent se financer. La problématique multi-taux se développe, nécessitant l'étude de champs aléatoires. Le lien entre les marchés financiers et l'économie réelle (assurance agricole, marchés de matières premières) est un sujet en pleine expansion.

À défaut de modéliser tous ces risques, le grand défi est de les mesurer. Pour limiter les risques que les banques font prendre à leurs clients, les régulateurs doivent disposer d'indicateurs chiffrés. La construction de telles mesures de risque a fait l'objet d'une activité mathématique intense ces dernières années, qui a d'ailleurs influencé la réglementation.

Un autre domaine qui a émergé de la crise est le souci de mesurer l'effet des interactions dans la modélisation des comportement des investisseurs et des institutions financières. Il s'agit d'une question d'une grande importance qui doit être étudiée en prenant en compte les spécificités des marchés financiers. Les modèles de réseaux issus de la physique ne sont en effet pas adaptés car ils ne contiennent en général pas la composante d'optimisation des agents économiques. Cette faiblesse, présente également dans les modèles continus de champs moyen, doit conduire à des développements importants de la théorie dans les années à venir. Un autre domaine de grande activité consiste en l'analyse du trading haute fréquence. Il s'agit là encore d'une modélisation qui s'écarte du paradigme de Black et Scholes. Les mathématiques appliquées doivent se placer à la fois du côté des investisseurs et du régulateur afin de mieux apprécier les effets de cette activité hautement technologique. En effet, les traders humains sont de plus en plus remplacés par des algorithmes et les opérations sont bouclées en quelques millièmes de seconde. Les nouveaux algorithmes exploitent en temps réel les réactions du marché, comme la fugace montée des prix qui suit un ordre d'achat, et n'hésitent pas à les provoquer (passer un ordre d'achat pour faire monter le prix, et immédiatement après un ordre de vente beaucoup plus important pour en profiter). C'est un terrain fertile pour les spécialistes de contrôle et d'optimisation. Les modèles étant de plus en plus sophistiqués, les résultats en forme fermée deviennent impossibles à obtenir, et il convient de développer des méthodes numériques pour approximer les solutions et pour calibrer les paramètres des modèles. La forte dépendance trajectorielle des risques financiers a conduit à une recherche très active dans le domaine de l'approximation par simulation. Ainsi, malgré les progrès accomplis dans le développement de méthodes numériques probabilistes pour les EDP non linéaires, il reste beaucoup à faire pour aborder les problèmes en grande dimension ainsi que la dépendance de l'ensemble de la trajectoire passée. Bien évidemment, dans le domaine de l'approximation, les développements asymptotiques et les techniques d'homogénéisation doivent aussi continuer à être développées afin de s'adapter aux problèmes spécifiques en mathématiques financières.

Le développement récent du *trading* algorithmique et l'enregistrement de bases de données gigantesques par les banques et autres institutions financières ont aussi soulevé de nouvelles questions de finance statistique. Les stratégies « haute fréquence » utilisées par les intervenants du marché nécessitent l'estimation statistique de paramètres de marché (volatilité, corrélation) sur des horizons de temps très courts. Dans ce contexte dit de microstructure des marchés, il est alors indispensable de remettre en cause les modèles classiques de type semi-martingale continue, ceux-ci se révélant beaucoup trop éloignés de la réalité des données. Ainsi, de nombreuses nouvelles modélisations de prix et carnet d'ordres, accompagnées de méthodes statistiques originales, ont été introduites ces dernières années afin de permettre aux participants de marché de s'adapter au cadre de la haute fréquence. Cependant, si notre connaissance de la microstructure des marchés est désormais beaucoup plus fine, il semble que nous soyons encore loin d'avoir obtenu un modèle statistique réellement pertinent à travers l'ensemble des échelles. Enfin, notons que les nouvelles problématiques statistiques nées de l'accumulation de données financières ne se limitent pas à la haute fréquence. En particulier, une meilleure compréhension des comportements individuels des divers intervenants de marché est désormais un enjeu très important pour beaucoup d'institutions. Dans ce cadre, l'utilisation de méthodes d'apprentissage statistique sur données en grande dimension est aujourd'hui en plein essor.

VI. L'INFORMATION SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE - DOCUMENTATION ET ÉDITION

Une situation fragilisée : bouleversement des conditions économiques

La recherche mathématique ne saurait se faire sans un accès constant à la littérature mathématique aussi bien ancienne qu'actuelle. Les résultats mathématiques ont une durée de vie très longue (parfois de plusieurs siècles) et peuvent être utiles à tout moment, même s'ils ont été jugés mineurs à leur parution. Cela se vérifie en consultant les références d'articles de mathématiques actuels : on y trouve souvent des publications datant de quelques dizaines d'années. À cette fin les laboratoires de mathématiques ont en général développé des bibliothèques dont le budget, pris sur les crédits recherche, peut représenter 30 % de celui du laboratoire. Dans ces bibliothèques, le chercheur trouve livres et revues nécessaires à son travail, Certaines bibliothèques mathématiques françaises ont monté des collections de revues et d'ouvrages de tout premier plan, et la création du Réseau National des Bibliothèques de Mathématiques (RNBM) a permis à tous les chercheurs d'en profiter.

L'avènement de l'électronique a été l'occasion d'une *concentration économique* et du développement de nouvelles pratiques éditoriales pour les revues. Tout d'abord les *abonnements par bouquets* ont conduit à une explosion des coûts d'abonnement et à une complexité juridique. Pour ces grands éditeurs (Elsevier, Springer, Wiley,...) l'aspect financier et juridique de l'abonnement aux revues est largement pris en charge par des institutions nationales ou régionales (l'INIST ou l'INSMI pour le CNRS, les SCD des universités, tous étant réunis depuis 2013 dans le consortium Couperin, qui négocie un grand nombre de ressources numériques, certaines faisant l'objet de groupements de commandes). Les bibliothèques de mathématiques continuent de garantir l'accès privilégié aux revues électroniques par un travail de veille, d'identification et de signalement sur des portails locaux ou fédérés et gardent leur rôle de soutien aux revues indépendantes, encore relativement nombreuses en mathématiques, qui sont délaissées par les SCD dont les moyens sont concentrés sur les bouquets. Plus récemment, sous couvert du libre accès, a été promu le *système auteur-payeur*, souvent appelé *"gold open access"*. Ce système, courant dans d'autres disciplines (biologie, médecine, économie,...), présente des risques avérés de clientélisme et de prolifération ; il fragilise les éditeurs indépendants. Dans une déclaration du 24 juillet 2012, les trois sociétés savantes françaises de mathématiques (SMF, SMAI, SFdS) ont mis en garde contre les dangers de ce modèle : il crée une inégalité financière entre les auteurs, risque d'affaiblir les processus de validation face à des impératifs commerciaux, fragilise les maisons d'édition de taille modeste, appartenant pour la plupart aux sociétés savantes ou aux universités, et ne règle en rien la croissance des coûts (voir l'avis du 29 juin 2012 du Comité d'éthique pour les sciences du CNRS (COMETS) et ses recommandations dans la *Lettre du COMETS* N° 3/avril-mai 2013).

Ces nouvelles orientations, si elles mettent à mal l'autonomie de la recherche, posent aussi le *problème de l'archivage* : les bibliothèques paient pour un accès à une plate-forme, mais ne gardent rien. Les contrats mentionnent que les bibliothèques possèdent les fichiers correspondant à leurs abonnements, mais dans les faits la chose peut s'avérer compliquée à mettre en œuvre : l'éditeur devrait céder tous les fichiers, les bibliothèques devraient pouvoir en proposer la consultation. Depuis 2011 l'acquisition de licences nationales de corpus d'archives d'éditeurs scientifiques est en cours. C'est le cadre du projet ISTEX, piloté par le programme Bibliothèque scientifique numérique (BSN). Cela ouvre l'espoir d'une mise en place future d'un archivage des formats électroniques d'articles. Il existe cependant une interrogation légitime sur la pérennité des formats électroniques archivés. À ce sujet l'Union Mathématique Internationale écrit[13] : *"The archiving of materials to make them easily accessible to posterity is an essential role for journals or their electronic counterpart. However there are deep concerns about how this is to be secured. For example, changes in formats or technological advances can make archived materials unreadable and a prominent publisher, which holds a digital archive going bankrupt could jeopardise the long-term accessibility of archives. In spite of sophisticated IT many archivists across the sciences and humanities believe that paper is still the most reliable and longest lasting medium."*

Quant à la Commission Européenne, elle prévoit[14]: « Les participants à tous les projets seront invités à déposer immédiatement une version électronique de leurs publications (version finale ou manuscrit évalué par les pairs) dans une archive sous un format lisible en machine. Pour ce faire, on utilisera la « voie dorée » (libre accès immédiat à la version publiée) ou la « voie verte ». Dans ce cas, la Commission autorisera une période d'embargo maximale de six mois, sauf dans le domaine des sciences sociales et humaines où la période maximale sera de douze mois (parce que les publications ont une « demi-vie » plus longue). Les coûts liés à la publication en libre accès (« voie dorée ») resteront éligibles dans le cadre d'Horizon 2020. La Commission étudiera aussi la possibilité de rembourser les redevances de publication en libre accès à la fin de la convention de subvention et les conditions de ce remboursement. »

Concernant les *ouvrages*, les changements liés à l'électronique sont moins nets, bien que de plus en plus souvent les éditeurs proposent soit des collections *e-books* en abonnement, soit des impressions à la demande. La version papier d'un ouvrage reste généralement l'outil de travail et le moyen d'archivage à long terme.

Besoins

1. Rappelons ce que les scientifiques attendent avant tout d'un modèle de publication :

---

[13] Newsletter IMU-Net 60 de juillet 2013.

[14] *Pour un meilleur accès aux informations scientifiques,* communication au Parlement Européen du 7 juillet 2012.

• le maintien d'un corpus pérenne et facilement accessible regroupant les contenus qui ont été validés et publiés,

• la diffusion des résultats et la préservation du savoir,

• la validation des résultats et la certification de la qualité,

• la correction des manuscrits (par les rapporteurs ou les correcteurs des maisons d'édition), le formatage des articles et la mise aux normes, éventuellement la production d'exemplaires papier.

Seule cette procédure qualitative permet de soutenir l'évaluation de la recherche des individus et des institutions. Par ailleurs, l'usage d'Internet permet le développement de produits dérivés (articles de survol, blogs, etc.) qui peuvent s'avérer très utiles.

Un effort particulier et adapté doit être fait pour accompagner la transition vers les futurs modèles de publication des revues académiques françaises dont l'équilibre est fragile. Cet effort gagnerait à être pensé au niveau européen (et donc aussi pour les revues académiques européennes). Si on arrive à fédérer les différentes initiatives européennes, celles-ci seront d'autant plus visibles et résisteront mieux à la concurrence des grands groupes commerciaux.

2. Les mathématiciens souhaitent une édition durable qui réponde aux besoins actuels sans compromettre la capacité à répondre aux besoins des scientifiques dans l'avenir. La Cellule MathDoc (UMS du CNRS/Université Joseph Fourier) incarne une vision dans laquelle un service public indépendant des éditeurs peut exercer des choix scientifiques et archiver les originaux. En particulier, l'investissement dans le projet *World Digital Mathematical Library* (DML) doit être soutenu. L'idée est de créer une bibliothèque numérique mondiale de mathématiques dans laquelle tout le patrimoine mathématique serait disponible à terme : le patrimoine historique par numérisation et le patrimoine récent par récupération des données numériques, d'en faire un service public indépendant des éditeurs de façon à disposer d'une archive sûre, fiable et pérenne (ce modèle a été porté au niveau européen par le projet EuDML (6 % du corpus mathématique) auquel a participé la Cellule MathDoc). La France (et en particulier l'INSMI) pourrait jouer un grand rôle.

Les chercheurs doivent être encouragés à déposer toutes leurs publications sur des archives ouvertes comme *HAL* ou *arXiv*. Ils ne doivent pas oublier qu'ils ont des droits auxquels il ne faut pas renoncer lors de la soumission d'un article.

3. Les mathématiciens souhaitent aussi un accès facile et large à la documentation. Cette mission est le mieux assurée par le RNBM (GDS du CNRS) qui fédère les bibliothèques de laboratoire (souvent liées au laboratoire, mais aussi parfois affiliées au SCD de leur université) et régule l'inégal accès des universités aux ressources mathématiques.

Les spécialistes de la documentation, qui s'occupent de l'offre documentaire diversifiée dans les bibliothèques de mathématiques, au plus près des besoins des mathématiciens (recherche documentaire, acquisition et négociation, signalement, diffusion, conservation), jouent aussi le rôle de médiateur vers la documentation scientifique, voire l'utilisation des outils. Leur travail devient de plus en plus complexe par l'adjonction de tâches mutualisées dans le cadre de projets nationaux, qui relèvent presque tous du domaine de l'information dématérialisée. Ils interviennent également dans la conservation du patrimoine scientifique et la valorisation de la documentation existante. Les personnels des bibliothèques de mathématiques ont un rôle central à jouer pour les mathématiques dans les travaux permettant la construction de la BSN (Bibliothèque scientifique numérique) et des portails afférents et doivent être soutenus dans ce sens par la communauté mathématique.

Recommandations

Les recommandations qui suivent sont en accord avec le schéma d'orientation stratégique de l'IST « Mieux partager les connaissances » du CNRS (novembre 2013).

* *Accompagner l'évolution des professionnels de l'IST vers les nouveaux métiers de l'édi-*

tion et de la documentation mathématiques et veiller à garder des personnels formés dans les bibliothèques de mathématiques. Ils participent de plus en plus à la conception et à l'évolution des portails, ainsi qu'à l'archivage pérenne des documents tant papier qu'électroniques. La double compétence « documentation et informatique documentaire » et/ou « documentation et édition électronique » doit être valorisée et enrichie par la formation. Cette évolution concerne également les professionnels intervenant dans d'autres domaines que les mathématiques, et on peut se poser la question s'il ne faudrait pas que chercheurs et bibliothécaires redéfinissent ensemble le profil (BAP F) de bibliothécaire-documentaliste scientifique et en particulier explicitent leur coordination avec les chercheurs ainsi qu'avec les SCD.

* *Définir des bonnes pratiques de l'évaluation*. L'arbitrage pour publication d'un travail doit clairement distinguer ce qui ressort du scientifique, du fond du travail proposé, et ce qui est de l'ordre de la « visibilité » (réputation d'une revue, d'un auteur,...). Le CNRS pourrait ainsi définir une « charte de l'évaluation » qui comporte aussi un volet sur le travail scientifique d'un chercheur pour promouvoir la publication de livres, de monographies ou d'articles de qualité dans les actes d'écoles ou de colloques. Par ailleurs, l'évaluation des universités devrait également porter sur leur politique documentaire et la réponse apportée aux besoins documentaires des enseignants-chercheurs et des étudiants.

* *Définir des bonnes pratiques éditoriales.* Cela peut passer par l'élaboration d'une liste complète qui contienne des indicateurs de qualité éditoriale : archivage en accès libre, prix de l'abonnement, accès ouvert, prix de la publication, accord national,... Le CNRS peut aider à promouvoir un label européen en s'appuyant sur le travail de la Bibliothèque scientifique numérique (BSN) et soutenir activement ces bonnes pratiques par ses choix politiques. Plus généralement, il convient de privilégier les modèles économiques vertueux qui contribuent à renforcer les bonnes revues. Une solution possible est la licence nationale, comme l'INSMI l'a déjà mise en place avec la SMF et la SME.

* *Soutenir les actions nationales de publication et d'archivage* que ce soit par le dépôt en accès libre de pré-publications (ce qui devrait être le souci de chaque directeur d'unité), par le développement de plates-formes techniques qui permettent la création ou la diffusion de revues académiques, la gestion des archives ouvertes et la numérisation, par le soutien financier à l'abonnement et l'archivage ouvert chez des éditeurs aux « bonnes pratiques », par la participation au projet international DML, par le soutien aux épi-journaux qui pourraient se greffer sur ces plates-formes.

* *Développer les outils informatiques et les plates-formes* qui soutiennent ces actions.

* *Renforcer l'organisation collective* par le soutien au RNBM, qui est un outil remarquable de mutualisation d'expériences, de partage et de collaboration avec ces autres structures de l'INSMI que sont la Cellule MathDoc et le GDS Mathrice (catalogue fusionné des périodiques, conservation partagée, prêt inter-bibliothèques, participation à l'élaboration du portail fédéré).

* S'impliquer dans la *construction de la Bibliothèque scientifique numérique.* Il faut encourager la participation en tant qu'experts de membres du RNBM et de la Cellule Mathdoc (mathématiciens et documentalistes) dans différents segments du projet de la BSN.

En conclusion, la perspective générale doit rester de préserver l'autonomie de la recherche.

VII. QUESTIONS DE PARITÉ

1. La place des femmes dans les carrières mathématiques. Où en est-on ?

Tous les indicateurs montrent que la situation des femmes en mathématiques se détériore au lieu de s'améliorer comme elle le fait dans d'autres disciplines ou dans d'autres pays. En quinze ans, entre 1996 et 2010, la part des femmes en mathématiques (sections CNU 25 et 26 réunies) n'a pas progressé et reste à hauteur de 21 % (avec de fortes disparités). Au CNRS, entre 1989 et 2009, alors qu'il y a eu une augmentation de 104 postes de chercheurs occupés par des hommes, seulement 6 postes supplémentaires ont été occupés par des femmes.

Les tableaux suivants donnent les effectifs en 2010 des deux sections de mathématiques du CNU. À noter le petit nombre de femmes professeures en section 25, une espèce en voie d'extinction ?

SECTION 25	Hommes	Femmes	Total	Femmes/Total
MCF	734	166	900	18,4%
PR	515	**36**	551	6,5%
Total	1249	202	1451	13,9%

SECTION 26	Hommes	Femmes	Total	Femmes/Total
MCF	767	387	1154	33,5%
PR	529	91	620	14,7%
Total	1296	478	1774	26,9%

(Source : MESR DGRH GESUP 2 - novembre 2010)

Chercheurs CNRS dans les unités INSMI	Hommes	Femmes	Total	Femmes/Total
CR	197	35	232	15,1%
DR	143	23	166	13,9%
Total	340	58	398	14,6%

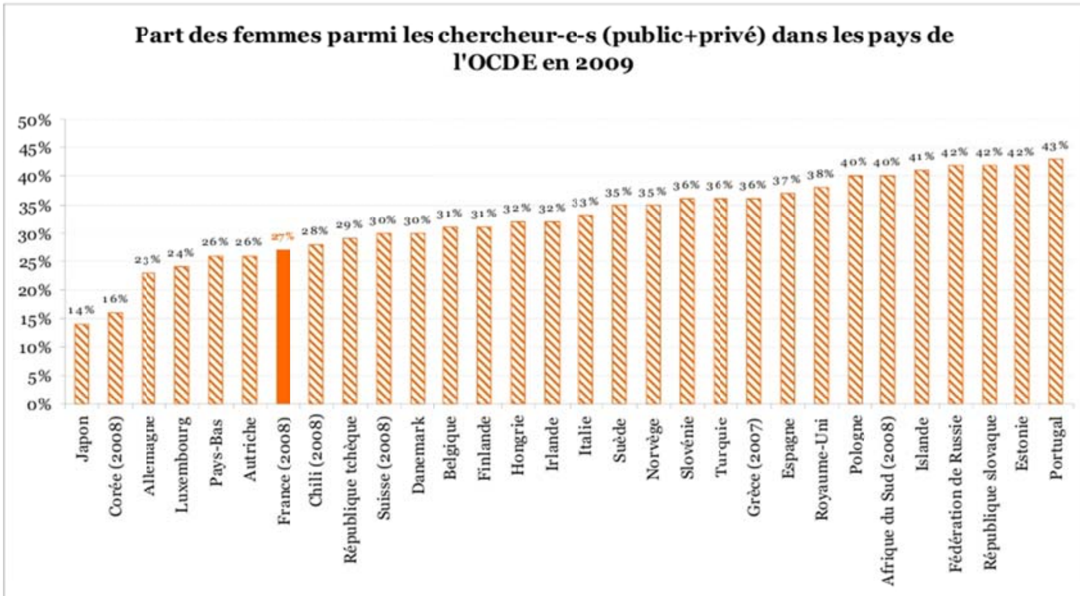
(Source : Labintel - 5 mai 2011)

Si l'on considère l'évolution sur les dernières années, la situation est également très préoccupante, particulièrement en section 25 :
De 1996 à 2005 :
Pour les hommes : + 173 postes (+15%)
Pour les femmes : - 3 postes (-1%)
De 2006 à 2010 :
Pour les hommes : - 76 postes (-6%)
Pour les femmes : - 50 postes (-20%)

En section 26, la situation est un peu meilleure :
De 1996 à 2005 :
Pour les hommes : + 287 postes (+27%)
Pour les femmes : + 120 postes (+36%)
De 2006 à 2010 :
Pour les hommes : - 42 postes (-4%)
Pour les femmes : + 28 postes (+6%).

Lors du mouvement de recrutement de 2011, en mathématiques, 49 comités de sélection sur 208 ne comportaient aucune femme.

La comparaison au niveau international, comme l'atteste le graphique ci-dessous (qui concerne les sciences en général), n'est pas satisfaisante non plus.



Source : Tableau de bord de l'OCDE de la science, de la technologie et de l'industrie, 2011.

MESR DGESIP-DGRI A3 MIPADI
Février 2012 11/12

2. Pourquoi chercher à accroître le nombre de femmes dans l'Enseignement Supérieur et la Recherche ?

Il se pose d'abord un problème d'équité : les femmes forment la seule « minorité » qui soit majoritaire dans la population et la société a le droit d'exiger que tous ses membres soient équitablement représentés dans les fonctions qu'elle rétribue avec l'argent public. Dans un monde où la communication tient une si grande place et peut conditionner les financements, comment expliquer que la part des femmes dans les mathématiques reste si basse, voire que dans quelques années il risque de ne rester quasiment plus de femmes professeurs en section 25 ? Il y a là une singularité intolérable des mathématiques[15].

Que faire ? Être simplement vigilant dans les années à venir ne suffira pas ; une action volontariste à tous les niveaux (recrutement, promotion) est désormais nécessaire. Dans de nombreux pays on s'attaque à ces questions et des actions innovatrices en matière de parité sont expérimentées, y compris la mise en place de quotas. En France, le sujet ne semble pas être un enjeu important pour la société bien que le Ministère des droits des femmes, la Mission pour la place des femmes au CNRS et la MIPADI au Ministère de l'Enseignement Supérieur et la Recherche prennent de nombreuses initiatives en faveur de la parité.

Les conclusions des travaux de la Mission pour la place des femmes au CNRS soulignent la « mise en évidence d'un modèle professionnel dominant et unique », porté par des valeurs communément considérées comme « masculines » : « disponibilité totale (psychique et physique), sens politique et goût du pouvoir ». Ce modèle d'exercice de métier est défini comme étant neutre.

[15]Qu'elles partagent cette singularité avec d'autres sciences « dures » ne change rien à l'affaire.

Il serait bon de nous interroger sur la portée négative de telles valeurs, en particulier dans nos critères d'évaluation.

3. Attirer les jeunes filles vers les filières et métiers scientifiques

Le nombre des étudiants poursuivant des études scientifiques diminue dangereusement. Nous souhaitons tous inverser cette tendance. Les jeunes filles sont nombreuses à passer un baccalauréat scientifique (en 2010 elles représentaient 45,2 % des élèves de Terminale S). Il y là un vivier important dans lequel il faut puiser. Malheureusement, comme l'indique une récente enquête PISA[16], les filles se détournent des filières scientifiques bien qu'elles puissent, comme les garçons, atteindre les plus hauts niveaux de performance (d'ailleurs, notamment à travers les Olympiades mathématiques, certains pays d'Europe de l'Est et d'Asie font émerger des jeunes filles avec des aptitudes mathématiques exceptionnelles17).

Selon la conclusion de l'enquête, « la réduction [des] écarts entre les sexes nécessite des efforts concertés de la part des parents et des éducateurs afin de remettre en cause et d'éliminer les stéréotypes sexistes, et de renforcer la confiance des filles en leurs propres capacités. » Il faut qu'à chaque niveau (collèges, lycées, universités, classes préparatoires, Grandes écoles) on encourage spécifiquement et publiquement les jeunes filles à entrer dans les filières et métiers scientifiques. Cela suffira-t-il ? Il faut pour cela réfléchir à la façon dont s'effectue pour un-e élève un choix d'orientation professionnelle. Au-delà des stéréotypes, les filles devront s'imposer au rebours de l'habitus. Celles qui font le choix, à la sortie du lycée, de poursuivre une carrière scientifique s'en sortent très bien si elles ont conscience à chaque étape qu'il ne leur suffira pas d'être compétentes, mais qu'il leur faudra prouver qu'elles le sont. Leur envie, généralement à contre-courant de ce qui leur est transmis, réclame beaucoup de courage et une bonne dose de confiance en soi. Enfin, le resserrement des possibilités de carrière dans les métiers de la recherche sape ces encouragements.

4. Propositions

Nous faisons un certain nombre de propositions à l'intention de l'INSMI et des unités de recherche.

À l'intention de l'INSMI :

- Statistiques sexuées :
  - Faire remplir l'IPA (Indice de Parité Académique) aux directeurs d'unité à l'adresse: http://postes.smai.emath.fr/parite/ipa
  - Demander aux UMR d'instaurer une collecte systématique et l'actualisation régulière des statistiques ventilées par sexe, statut et grade.
  - Réaliser chaque année des statistiques sexuées nationales concernant les chercheurs et les chercheuses de l'INSMI et les faire connaître largement (site web, diffusion par mail aux laboratoires, etc...).
- Comités de rédaction : Accroître le nombre de femmes dans les comités de rédaction et exiger leur présence dans les revues soutenues financièrement par le CNRS et par les universités.
- Délégations CNRS : Inciter largement les femmes à demander une délégation au retour d'un congé (un congé de maternité n'est pas une décharge d'enseignement !).
- Sensibiliser systématiquement, par une formation, les membres du Comité National et les directeurs d'unité aux questions de parité.

---

[16] *Garçons et filles sont-ils aussi bien préparés face à l'avenir ?,* www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PIF-2014-gender-international-version-FR.pdf

[17] T. Andreescu, J. A. Gallian, J. M. Kane, J. E. Mertz, *Crosscultural analysis of students with exceptional talent in mathematical problem solving*, Notices Amer. Math. Soc. 55 (2008),1248-1260.

À l'intention des laboratoires :

Nous recommandons

- d'accroître la présence des femmes dans toutes les instances : comités, colloques, séminaires, jurys de thèses et d'HDR, conseils de laboratoires,
- d'interdire la constitution de comités de sélection, de jurys et de comités de rédaction ne comprenant aucune femme,
- de mener une politique incitative au moment du redémarrage d'une activité de recherche après une longue période d'arrêt (congé maternité, arrêt maladie de longue durée, retour après une mobilité extérieure au milieu académique, etc...) en offrant la possibilité :
    - du financement d'une invitation d'un-e collègue pendant un mois ou d'un-e post-doc pour faciliter le retour à la recherche,
    - d'obtenir des facilités financières pour partir en mission,
    - d'obtenir une prise en compte particulière pour les demandes locales de CRCT,
- comme dans d'autres pays, de ne pas prendre en compte l'âge des candidat-e-s dans les concours de recrutement,
- de mettre les questions de parité à l'ordre du jour des conseils de laboratoire : réflexion sur les stéréotypes (conscients ou inconscients) à l'œuvre lors des concours de recrutement,
- de communiquer auprès des professionnel-le-s de l'orientation sur les métiers scientifiques et technologiques en montrant qu'ils conviennent tout autant aux filles qu'aux garçons,
- d'encourager l'organisation de rencontres entre élèves/étudiant-e-s et mathématiciennes,
- de développer des actions spécifiques avec les responsables de Master afin d'encourager les étudiantes à poursuivre des études de doctorat et à envisager une carrière dans la recherche.

Signalons que la London Mathematical Society a publié récemment un rapport[18] comportant à la fois des statistiques assez complètes concernant les départements de mathématique au Royaume-Uni, ainsi qu'un nombre important de recommandations et bonnes pratiques pour favoriser l'avancement des carrières féminines. On y trouvera de nombreuses pistes intéressantes dont la communauté mathématique française pourrait s'inspirer.

VIII. L'INSMI ET LES UNITÉS DE RECHERCHE

Comme partout dans le monde, les mathématiques françaises s'exercent essentiellement au sein des universités. La France a cette particularité qu'un organisme public national, le CNRS, joue un rôle structurant important pour les mathématiques. L'interlocuteur privilégié au CNRS pour les mathématiciens est l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI).

Les missions nationales de l'INSMI

À la suite de la modification en 2009 du décret organique qui le régit, le CNRS s'est organisé en instituts. C'est à cette occasion qu'a été créé l'INSMI. C'est depuis cette création que pour la première fois dans l'histoire récente du CNRS les mathématiques occupent une place entière à l'égal de celle dévolue par exemple à la biologie ou la chimie. Par arrêté du 28 juin 2010, l'INSMI a été doté d'une mission nationale « d'animation et de coordination dans le domaine des mathématiques », officialisant des missions que les responsables successifs pour les mathématiques au CNRS exerçaient déjà. Parmi ces missions nationales relevons

- l'animation et la coordination des unités mixtes de recherche (UMR) de mathématiques,
- l'allocation de ressources, en particulier en personnel chercheurs et IT, qui sont d'une importance cruciale pour les laboratoires,
- le soutien aux groupements de recherche (GDR) qui jouent un grand rôle dans le développement de thématiques transversales et dans la formation des jeunes chercheurs,

---

[18] *Advancing women in mathematics: good practice in UK university departments*, London Mathematical Society, 2013.

- le soutien aux centres de rencontres comme l'Institut Henri Poincaré (IHP) ou le Centre international de rencontres mathématiques (CIRM),
- la politique documentaire, la Cellule MathDoc, le RNBM,
- les réseaux de personnel (Mathrice),
- le développement de structures internationales comme les unités mixtes internationales (UMI), les laboratoires internationaux associés (LIA), les groupements de recherche internationaux et européens (GDRI et GDRE),
- le développement des interactions et l'ouverture de nouvelles voies à travers par exemple l'Agence Maths/Entreprises (AMIES) et les programmes exploratoires,
- la diffusion et la vulgarisation des connaissances.

Contrairement aux neuf autres Instituts de l'organisme, l'INSMI ne recouvre qu'une seule section du Comité National (actuellement, la section 41).[19]

Pour des raisons historiques, les mathématiques françaises sont implantées dans les universités et la grande majorité des mathématiciens sont employés par elles. Cependant, il y a dans la communauté mathématique française un large consensus sur l'importance du rôle de coordination et de structuration joué par les organismes de recherche, avant tout par l'INSMI. Ce rôle est crucial pour la mise en œuvre d'une stratégie nationale pour les mathématiques françaises et leur développement. Il a notamment permis que l'on fasse de bonnes mathématiques à peu près partout en France. Rien ne doit fragiliser le rôle et les missions de l'INSMI et il convient de réaffirmer avec force son rôle stratégique national. Il serait extrêmement dommageable que le financement conséquent des Initiatives d'avenir (Idex, Labex, Equipex, etc.) dont ont bénéficié certains centres d'excellence ne crée une France mathématique à deux vitesses et n'affaiblisse les missions nationales de l'INSMI.

Localement les universités jouent un rôle crucial non seulement par la mise à disposition de locaux, de personnel, de ressources documentaires ou la mise en place d'enseignements avancés et de collèges doctoraux, mais aussi par un soutien croissant à la recherche, reflétant le rôle accru qu'elles entendent jouer dans ce domaine. Un laboratoire de mathématique ne saurait vivre sans le soutien de son université (la plupart des mathématiciens considèrent d'ailleurs la recherche comme inséparable de la formation).

Les unités de recherche

Comme pour d'autres disciplines scientifiques, la recherche mathématique est organisée au niveau local en unités de recherche. Celles-ci contribuent au développement de la recherche mathématique, réunissent des catégories de personnels aux statuts variés (chercheurs des organismes de recherche, enseignants-chercheurs relevant des universités, ingénieurs et techniciens, doctorants et post-doctorants), organisent le travail collectif (séminaires, groupes de travail, construction de projets de recherche, documentation, gestion de la recherche, outils informatiques, études doctorales et enseignement de Master), même si pour beaucoup de chercheurs leur travail de recherche reste avant tout individuel. Les laboratoires sur lesquels l'INSMI a une action directe sont ceux qui sont labellisés unités mixtes de recherche (UMR). C'est un label de qualité très recherché, qui permet à l'INSMI d'attribuer aux UMR crédits et personnels. Plus encore que les crédits (d'ailleurs nettement moins importants que ceux provenant des universités), c'est la mise à disposition par le CNRS de ressources humaines (chercheurs et IT) qui s'avère cruciale pour la vie et la qualité d'une UMR. Dans les circonstances difficiles actuelles, il faut impérativement préserver cette richesse, en poursuivant un recrutement substantiel régulier de jeunes chercheurs — condition nécessaire pour assurer la pérennité des mathématiques en France — et en maintenant l'emploi des IT sans lesquels un laboratoire ne pourrait fonctionner correctement.

---

[19] Cette situation très particulière aux mathématiques n'empêche pas qu'il existe également des chercheurs exerçant des activités mathématiques au sein d'autres Instituts du CNRS.

Il convient aussi de ne pas oublier qu'en dehors des UMR les mathématiques sont également présentes dans des unités de recherche relevant exclusivement d'une université, souvent sous forme d'équipes d'accueil (EA). Ces centres plus modestes, où se fait souvent une recherche de grande qualité, doivent continuer à être soutenus. D'ailleurs, certains font partie d'une fédération de recherche.

Délégations

L'accueil en délégation au CNRS a permis à de nombreux enseignants-chercheurs (EC) d'être déchargés de leur enseignement ou d'activités administratives chronophages, et ainsi d'avancer leur recherche ou de la reprendre à l'issue d'un congé (par exemple de maternité). Une délégation permet le cas échéant à un EC d'être affecté dans un autre laboratoire que son laboratoire d'origine, y compris dans une UMI. La demande parmi les mathématiciens, particulièrement forte, est en progression constante (plus de 300 demandes en 2013) et l'INSMI a pu jusqu'ici en faire bénéficier beaucoup de collègues, ce qui représente chaque année un total de 100-110 années (c'est ainsi que 192 délégations ont été accordées en 2013, dont 52 à des femmes). Ces demandes traduisent un réel besoin de la communauté et les délégations représentent une passerelle facile à mettre en œuvre entre universités et CNRS. Il convient de poursuivre, voire d'amplifier cette politique.

Développement international

Les échanges internationaux sont vitaux pour la recherche scientifique. Au CNRS les mathématiciens ont été les premiers à créer des unités mixtes internationales (UMI) sur le lieu d'excellents laboratoires étrangers scientifiquement liés à des laboratoires français. Ces expérimentations ont progressivement évolué pour se structurer en une véritable action internationale visant à permettre l'établissement de liens privilégiés et durables. Aux UMI il convient d'ajouter d'une part les laboratoires internationaux associés (LIA), les groupements de recherche européens ou internationaux (GDRE et GDRI), qui sont juridiquement des structures plus légères, et d'autre part les programmes internationaux sur appel d'offres du CNRS tels que les programmes internationaux de collaboration scientifique (PICS), les conventions d'échange de chercheurs et enfin les programmes en coopération avec le Ministère des affaires étrangères tels que MathAmSud, SticAsie.

Actuellement, l'INSMI pilote 6 UMI et 12 LIA/GDRI hors Union Européenne. Chaque année le CNRS envoie dans les UMI des chercheurs et des enseignants-chercheurs français en délégation pour des séjours d'au moins un semestre. Les UMI sont également un lieu privilégié de collaboration avec les autres instituts du CNRS, et plus particulièrement de l'INS2I, qui envoient très régulièrement des chercheurs et enseignants-chercheurs dans les UMI de mathématiques. Les LIA/GDRI ont été récemment réorientés pour couvrir des spectres scientifiques plus larges sur des zones géographiques où le paysage de la recherche évolue rapidement (Brésil, Chine, Inde). Ils fonctionnent comme des portails d'accès à l'école française pour les mathématiciens du pays partenaire et réciproquement. Au sein de l'Union Européenne, les UMI sont au nombre de 3 accompagnés de 6 LIA/GDRI. Les LIA/GDRI qui sont majoritairement issus de l'internationalisation de GDR nationaux sont pour leur part plus centrés thématiquement.

Du point de vue de l'accueil des chercheurs et enseignants-chercheurs français en UMI, le modèle actuel basé sur le principe de l'affectation en UMI a atteint ses limites budgétaires. Un modèle alternatif basé sur une prise en charge locale accompagné de supports de délégation tel que celui qui est actuellement testé en Australie devrait permettre une présence significative de chercheurs français sur un nombre accru de sites. Au sein de l'Union Européenne, les LIA/GDRI doivent pouvoir permettre un effet de levier en facilitant la mise en place de consortiums pour répondre aux appels d'offres de l'Union.

Financement de la recherche

La création en 2005 de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) et le financement de projets ont injecté des moyens financiers souvent importants dans les mathématiques françaises et ont permis à des jeunes chercheurs de promouvoir leurs propres projets en toute autonomie, voire de créer leur propre équipe de recherche. Ces nouveaux moyens ont permis de recruter de jeunes chercheurs post-doctorants, d'organiser des activités scientifiques multiples (notamment conférences et missions) à des niveaux de financement qui étaient inconnus jusque là. Mais ces financements sur projet n'ont pas que des aspects positifs : il faut un temps et une énergie considérables pour mettre en place les projets et ensuite les gérer, les contraintes administratives étant importantes ; ce mode de financement contribue aussi à la précarisation des jeunes chercheurs embauchés souvent pour une seule année, sans compter les surcoûts importants, financiers et en personnel, pour les laboratoires et les universités qui hébergent ces projets. Enfin, les financements sur projet ne permettent aucune politique scientifique sur le long terme. Il faut impérativement préserver un financement récurrent substantiel des UMR, qui sont seules à même de mener une politique ambitieuse à leur niveau.

Il convient également d'être vigilant face à la tentation d'évaluer les laboratoires et les chercheurs en fonction des projets et contrats dont ils bénéficient ; cette pratique est déjà en vigueur dans certains pays et dans certaines disciplines.

Il est essentiel que les mathématiciens participent à l'élaboration des programmes scientifiques nationaux, à celles notamment des appels d'offres de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) qui doivent laisser largement la place à des axes ou des programmes « blancs » non orientés, puisqu'il est impossible de prédire quel domaine de recherche va se développer de manière particulièrement prometteuse ou de quel coin des mathématiques proviendra la prochaine application. Comme l'écrit un récent rapport canadien[20], "*[I]t is difficult to predict which particular fields of mathematics and statistics will most guide innovation in the next decades. Indeed, all areas of the mathematical and statistical sciences have the potential to be important to innovation, but the time scale may be very long, and the nature of the link is likely to be surprising. Many areas of the mathematical and statistical sciences that strike us now as abstract and removed from obvious application will be useful in ways that we cannot currently imagine. [. . .] [W]e need a research landscape that is flexible and nonprescriptive in terms of areas to be supported.*"

Évaluation de la recherche

Depuis quelques années un certain nombre d'indicateurs chiffrés (facteurs d'impact, nombre de citations) sur la production des chercheurs ou sur l'importance des revues scientifiques sont disponibles et il est tentant de les utiliser pour évaluer les chercheurs, les laboratoires, les universités ou les revues. Ces chiffres ne reflètent souvent pas la réalité et sont aisément manipulables. À la suite de la « Déclaration de San Francisco sur l'évaluation de la recherche »[21] signée par un grand nombre d'organismes de recherche dans le monde entier, il faut réaffirmer avec force que ces chiffres ne suffisent pas pour mesurer la qualité d'un article ou pour évaluer les chercheurs lors des recrutements ou des promotions. De la même façon l'évaluation d'un laboratoire ne saurait se résumer à une note. Enfin, l'évaluation de la recherche doit rester l'apanage d'une autorité publique et des pairs.

IX. RESTER ATTRACTIVES : UN DÉFI MAJEUR POUR LES MATHÉMATIQUES

Tout le monde s'accorde pour affirmer que notre société aura besoin de plus en plus de jeunes

[20] *Solutions for a Complex Age: Long Range Plan for Mathematical & Statistical Sciences Research in Canada*, Natural Sciences & Engineering Research Council (Canada), 2012.

[21] *San Francisco Declaration on Research Assessment* (DORA), 2012, http://am.ascb.org/dora/

avec de solides compétences mathématiques. Malheureusement, en ce début du 21e siècle on observe une désaffectation générale pour les sciences et notamment pour les mathématiques. La communauté mathématique française a pris, depuis quelques décennies déjà, la mesure de ce problème majeur et elle est très active dans la popularisation des mathématiques. Un grand nombre d'initiatives en direction du grand public ont été prises par les sociétés savantes, l'INSMI, les laboratoires de mathématiques, les IREM, divers centres de culture scientifique, des associations comme « Animath », « Math en jeans », etc., mais aussi individuellement par de nombreux collègues, y compris des enseignants de lycées et collèges. Mentionnons le site Internet très actif « Images des mathématiques », qui présente la recherche mathématique, notamment française, à l'extérieur de la communauté scientifique. Citons également la brochure « Les métiers des mathématiques » réalisée par l'ONISEP en collaboration avec les sociétés savantes ; elle décrit un nombre impressionnant de métiers variés nécessitant une formation mathématique. Plus récemment, le Forum Emploi Mathématique a connu en 2013 sa troisième édition, réunissant 1500 participants (étudiants, mathématiciens et professionnels de l'industrie). Pour couvrir les besoins futurs, il faudra poursuivre et accroître les efforts en direction du grand public et des lycéens. Malheureusement, la diminution des heures d'enseignement des mathématiques dans l'Enseignement secondaire (et plus généralement le peu d'heures consacrées aux sciences) ne permet plus de donner une large formation scientifique aux élèves ; elle produit de très fortes inégalités entre une toute petite minorité très bien formée et une masse de jeunes de plus en plus éloignés des sciences, comme le révèlent les résultats médiocres de la France dans le programme PISA [22] , mais aussi la difficulté de recruter des enseignants de mathématiques dans l'Enseignement secondaire.

L'avenir des mathématiques en France passe par le renouvellement de la communauté. Un certain nombre de facteurs le conditionne : des financements de thèses et une offre de postes suffisants et prévisibles, un environnement de travail et des salaires d'entrée plus attractifs, une coopération accrue entre universités et grandes écoles.

Il faudrait attirer davantage de bons étudiants étrangers au niveau Master et doctorat. Nous disposons de grandes capacités d'accueil inutilisées qui pourraient être mises à profit pour renforcer l'attraction internationale de la France en tant que destination universitaire. Le système français est à cet égard handicapé par sa complexité (dualité universités-grandes écoles) et son manque de visibilité. Il convient de réfléchir à un dispositif plus lisible.

Avec le développement des interactions entre mathématiques et d'autres disciplines ou l'industrie, il paraît indispensable de former davantage de scientifiques ayant des connaissances mathématiques au-delà de leur domaine d'expertise[23], capables de communiquer avec des chercheurs d'autres disciplines sur des problèmes qui peuvent sembler posés de manière floue pour un mathématicien, et sachant utiliser des outils informatiques de manière efficace.

Encore trop peu d'élèves-ingénieurs des Grandes écoles entreprennent une thèse de doctorat en fin de cursus. Standard reconnu à l'étranger, le doctorat est généralement moins valorisé dans les entreprises françaises que le traditionnel diplôme d'ingénieur, qui, faut-il le rappeler, est au niveau Master. Pour reprendre les termes d'un rapport[24] du Haut Conseil de la Science et de la Technologie, « [...] à peine 10 % des cadres supérieurs sont titulaires du doctorat, contre 30 % aux Etats-Unis. Ce manque de formation par la recherche et à la recherche prive ces cadres d'une méthodologie unique alliant : analyse de problématiques complexes, culture du doute et de la confrontation

[22] Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) de l'OCDE.

[23] Une étude statistique récente semble plus généralement conclure à l'intérêt pour un jeune chercheur d'avoir un spectre mathématique large et de ne pas rester trop spécialisé. Voir P. Dubois, J.-C. Rochet, J.-M. Schlenker, *Productivity and mobility in academic research: evidence from mathematicians*, Scientometrics, DOI 10.1007/s11192-013-1112-7.

[24] *Les liens entre universités et grandes écoles et, l'interaction entre recherche et enseignement*, Haut Conseil de la Science et de la Technologie, 2014.

d'idées, défrichage de l'inconnu, recherche de solutions innovantes. »

Pour attirer davantage de jeunes vers les études scientifiques et particulièrement vers les mathématiques, il est indispensable, comme il a été dit au chapitre VII, de faire un effort particulier à l'égard des jeunes filles qui sont nombreuses à obtenir un baccalauréat scientifique et de les amener à poursuivre un cursus complet en mathématiques. En France comme dans d'autres pays comparables, il y a encore trop peu de mathématiciennes en poste à l'Université ou dans les organismes de recherche. Cet état de fait documenté plus haut est dommageable à l'attraction des jeunes filles vers les études scientifiques, les métiers où les femmes ne sont pas visibles n'attirant pas les jeunes filles. Pour simplifier, on pourrait dire que les femmes forment la plus grande ressource humaine la moins utilisée ; il y a là un vivier où les possibilités d'accroissement sont considérables. Une politique de communication vigoureuse des Universités et des Grandes écoles en direction des jeunes filles pourrait permettre d'inverser la tendance.

En conclusion, les mathématiques deviennent de plus en plus multiformes et continuent à s'ouvrir aux autres disciplines et aux applications. Cette diversité a intérêt à s'accompagner d'une diversité dans le profil des scientifiques de demain et dans leur recrutement.

BIBLIOGRAPHIE

- *Prospective en Section 01*, Section 01 du CNRS, 2006.
- *Rapport de prospective sur les mathématiques appliquées et industrielles*, SMAI, 2008.
- *Les interactions pluridisciplinaires des mathématiques*, rapport de P. Dehornoy *et al.*, INSMI, CNRS, 2010.
- *Rapport de conjoncture 2010*, Section 01 du CNRS, 2010.
- *International Review of Mathematical Sciences*, EPSRC, 2010. http://www.epsrc.ac.uk/newsevents/pubs/international-review-of-mathematical-sciences/
- *Mathematics and industry, Forward look*, ESF, Strasbourg, 2010.
- *Mathematics in Industry*, SIAM, Philadelphia, 2012.
- *Fueling Innovation and Discovery. The mathematical sciences in 2025*, Committee on the Mathematical Sciences in 2025; Board on Mathematical Sciences and Their Applications; Division on Engineering and Physical Sciences; National Research Council, The National Academies Press, USA, 2012. http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=13373
- *Remarques et propositions sur les structures de la recherche publique en France*, Académie des sciences, Paris, 2012.
- *The mathematical sciences in 2025*, Committee on the Mathematical Sciences in 2025; Board on Mathematical Sciences and Their Applications; Division on Engineering and Physical Sciences; National Research Council, The National Academies Press, USA, 2013. http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=15269
- *Solutions for a complex age. Long range plan for mathematical and statistical sciences research in Canada, 2013-2018*, NSERC, 2013.
- *Mathématiques : l'explosion continue*, FSMP, SFdS, SMAI, SMF, 2013.
- Rapports de prospective des Conseils scientifiques de l'INP, de l'INSHS, de l'INSU du CNRS, 2013.
- *Advancing women in mathematics: good practice in UK university departments*, London Mathematical Society, 2013, http://www.blitzadv.co.uk/LMS-BTL-17Report.pdf
- *Mathématiques et complexité du système Terre*, Rapport de synthèse de l'Atelier de réflexion prospective MathsInTerre (dir. Didier Bresch), Agence Nationale de la Recherche, 2014, http://mathsmonde.math.cnrs.fr/telechargements/document.html
- *Les liens entre universités et grandes écoles et, l'interaction entre recherche et enseignement*, Haut Conseil de la Science et de la Technologie, 2014

REMERCIEMENTS

- aux membres du Conseil scientifique de l'INSMI,
- à la direction de l'INSMI et notamment à Guy Métivier, Christoph Sorger, Sinnou David, Patrick Dehornoy et Clotilde Fermanian pour leur encouragement et leur soutien constants,
- à Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, présidente du Conseil scientifique de l'INSIS, à Marie-José Casanove, présidente du Conseil scientifique de l'INP et à Pascal Weil, président du Conseil scientifique de l'INS2I du CNRS,
- aux responsables du RNBM et de la Cellule MathDoc,
- à Amandine Aftalion, Andrei Agrachev, Jean-Paul Allouche, Luis Almeida, Claudio Altafini, Martin Andler, Moreno Andreatta, Jean-François Aujol, Roger Balian, Guy Barles, Julien Barré, Arnaud Beauville, Anne Bergez, Valérie Berthé, Michel Berthier, Philippe Besse, Olivier Biquard, Michael Blum, Thierry Bodineau, Aline Bonami, Cédric Bonnafé, Jean-Benoît Bost, Bruno Bouchard, Didier Bresch, Philippe Briet, Piermarco Cannarsa, Olivier Cappé, Pierre Cardaliaguet, Gilles Carron, Patrick Cassam-Chennaï, Antoine Chambert-Loir, Zoé Chatzidakis, Yacine Chitour, Piotr Chrusciel, Jean Clairambault, Pierre Collet, Alain Comtet, Jean-Michel Coron, Georges-Henri Cottet, Sylvain Crovisier, Pierre-Louis Curien, Françoise Dal'bo, Laurent Daudet, François David, Isabelle Debled-Renesson, Pierre Degond, Jean-Pierre Demailly, Benoît Douçot, Bertrand Duplantier, Ivar Ekeland, Maria Esteban, Jalal Fadili, Bertrand Fourcade, Gilles Francfort, Hélène Frankowska, Louis Funar, Carlo Gasbarri, Jean-Pierre Gaspard, Stéphane Gaubert, Jean-Paul Gauthier, Anne Gégout-Petit, Bertrand Georgeot, Emmanuel Germain, Étienne Ghys, Giambattista Giacomin, Antoine Girard, Olivier Giraud, Laurent Gourvès, Boris Gralak, Michel Granger, David Guéry-Odelin, Alice Guionnet, Michael Gutnic, Vincent Hakim, Aziz Hamdouni, Philippe Helluy, Didier Henrion, Frédéric Hérau, Vincent Heuveline, Laurent Imbert, Ilia Itenberg, David Janin, Monique Jeanblanc, Alain Joye, Sergei Kuksin, Jorge Kurchan, David Lannes, Jean Bernard Lasserre, Jean-Pierre Laumond, Jean-Francois Le Gall, Tony Lelièvre, Nathalie Leresche, Mathieu Lewin, Michel Ledoux, Frank Loray, Stéphane Mallat, Dominique Manchon, Paul Manneville, Pascal Massart, Claire Mathieu, Sylvie Méléard, Yves Meyer, Gilles Millerioux, Perola Milman, Jérôme Monnot, Gilles Montambaux, Jean-Michel Morel, Jean-Marie Morvan, Emilie Neveu, Stéphane Nonnenmacher, Pierre Pansu, Olivier Parcollet, Dimitry Peaucelle, Benoît Perthame, Christian Peskine, Gabriel Peyré, Benedetto Piccoli, Claude-Alain Pillet, Christophe Prieur, Geoffrey Powell, Jean-François Raskin, Vincent Rivasseau, Mathieu Rosenbaum, Christian Rosendal, Dominique Rossin, Pierre Rouchon, Carlo Rovelli, Hubert Saleur, Norbert Schappacher, Sylvia Serfaty, Sylvain Sorin, Dominique Spehner, Jean-Christophe Thalabard, Nizar Touzi, Emmanuel Trélat, Jean-Philippe Vert, Michel Waldschmidt, Wendelin Werner, Enrique Zuazua pour leur aide,
- aux dizaines de collègues qui ont répondu aux enquêtes lancées au cours de notre mandat.

COMITÉ DE RÉDACTION DU RAPPORT

Colette Anné, Pascal Auscher, Olivier Gipouloux, Christian Kassel, Ellen Saada

TABLE DES MATIÈRES

Septembre 2014