01

LES MATHEMATIQUES ET LEURS INTERACTIONS

Les mathématiques sont tout à la fois une science poursuivant pour elle-même ses propres développements, et un outil universel pour toutes les autres sciences. L'équilibre entre ces deux axes est complexe, et la façon que l'on peut avoir de l'appréhender conditionne à l'évidence l'orientation d'une politique scientifique en mathématiques.

Le rapport entre le "noyau dur" et les applications a fortement évolué depuis quelques décennies. Divers facteurs, tant sociaux que scientifiques, ont depuis poussé les mathématiques à s'ouvrir davantage sur le monde qui les entoure, que ce soit le monde universitaire des autres disciplines ou le monde industriel.

Aujourd'hui, sans que l'importance des applications des mathématiques soit le moins du monde minimisée, un certain besoin de recentrage est perçu par la communauté mathématique, dont l'ampleur peut être mesurée par la nuance entre le titre du chapitre la concernant clans le *Rapport de conjoncture* 1989 : "*Interactions des mathématiques*" et celui d'aujourd'hui "*les mathématiques et leursinteractions*".

LES ENJEUX

Les résultats mathématiques se caractérisent essentiellement par leur généralité et par leur permanence. Ces deux caractéristiques, que nous allons développer, sont à l'origine des spécificités des relations entre les mathématiques, les autres sciences et les applications.

On reproche souvent aux mathématiques une constante de temps considérable : la résolution d'un problème peut survenir plusieurs années - voire plusieurs décennies - après qu'il ait été posé, et ne plus intéresser l'auteur. Sans parler des exemples fameux où la solution s'est fait attendre plusieurs siècles ou millénaires : quadrature du cercle, trisection de l'angle, nombres parfaits, théorème de Fermat, hypothèse de Riemann... Bien que ce soit souvent un stimulant très puissant pour les mathématiciens, cet état de fait est un handicap certain pour les interactions des mathématiques. C'est aussi une manifestation de la durabilité des concepts mathématiques, qui en fait un enjeu culturel de première grandeur. La spécificité de ces concepts n'est pas l'abstraction, mais la généralité. Leur valeur est donc interdisciplinaire par essence : qu'ils proviennent d'une discipline, et l'on découvrira, grâce à l'approche mathématique, que la même structure gouverne un phénomène clans un tout autre domaine. C'est une des fonctions des mathématiques que d'établir des relations entre des notions abstraites et de permettre d'identifier des modèles ayant la même structure.

A cette généralité s'ajoute donc la permanence de la validité des résultats et des théories mathématiques ; on ne peut comparer, de ce point de vue, la "crise des fondements" qui a affecté les mathématiques dans la période 1890-1935 et les révolutions qui ont touché la physique à peu près à la même époque. Une théorie physique n'est valable que dans certaines limites : de distance, de vitesse, de temps ou de masse par exemple (on s'en aperçoit le plus souvent après coup, au moment de l'établissement d'une nouvelle théorie). Par contraste, un théorème sera toujours vrai et certains seront toujours utiles.

Ces deux propriétés de permanence et de généralité permettent, à la longue, l'assimilation des idées utiles par le plus grand nombre d'individus. Les mathématiques font donc pleinement partie du patrimoine culturel de l'Humanité. Il n'est pas besoin de dire à quel point cette diffusion des connaissances mathématiques est utile au progrès de toutes les sciences.

Les mathématiques participent donc simultanément :

- *au développement de la culture humaine,* et les mathématiciens tiennent à être reconnus comme détenteurs d'une part de cette culture,

- *au mouvement général des sciences :* leur langage sert à la fois de support à bien des développements, que ce soit en physique, en biologie ou en sciences de l'homme, et de moyen de communication entre ces sciences,

- *au développement du monde moderne* : les mathématiques élaborées ont un impact technologique croissant et contribuent à l'augmentation de la production dans tous les domaines, à celui de la circulation d'information et des capacités d'organisation.

Au-delà de cette évolution qualitative, on peut schématiquement dire que le lien entre mathématiques et interactions a essentiellement été marqué depuis quatre ans par deux phénomènes :

D'une part, l'accroissement phénoménal des puissances de calcul des ordinateurs s'est poursuivi, au point qu'aujourd'hui des entreprises de taille moyenne peuvent avoir facilement accès à la simulation numérique dans des conditions réalistes. Ceci accroît considérablement les enjeux industriels des mathématiques, comme d'ailleurs leurs enjeux dans des domaines aux ambitions avant tout cognitives (biologie ou sciences sociales par exemple). Le rôle du CNRS sur ce point est - et doit demeurer - important : beaucoup d'industries utilisent en effet les compétences des laboratoires du CNRS pour résoudre leurs problèmes de modélisation numérique.

D'autre part, les interactions des mathématiques avec les autres sciences sont marquées par l'utilisation de plus en plus répandue de modèles (voir le thème "*Modélisation*" du *Rapport de conjoncture)*. La plupart de ces modèles s'expriment dans le langage mathématique, et leur traitement fait usage de résultats mathématiques parfois très sophistiqués ou suscitent des recherches dont certaines sont de nature fondamentale. Soulignons l'importance souvent ignorée de ce que l'on pourrait appeler la "modélisation fondamental", dans laquelle une théorie abstraite en soi bénéficie de l'apport du mathématicien. Un exemple typique réside dans l'essor en physique théorique de l'usage de la géométrie non commutative.

Les enjeux économiques et sociaux du développement de modèles mathématiques efficients ne cessent de croître : la régulation et le pilotage des grands réseaux techniques (réseaux nationaux et internationaux de télécommunication, d'énergie, de transports...), la gestion de systèmes socio-économiques (les entreprises, les grandes administrations) d'une complexité croissante, la maîtrise des interactions entre nos sociétés et le milieu naturel (les problèmes d'environnement), le besoin d'une connaissance plus fine des phénomènes naturels eux-mêmes (qui se traduit, par exemple, par la nécessité de disposer de prévisions météorologiques de plus en plus précises et fiables) sont autant de champs d'application en plein développement et d'interactions pour les mathématiques.

On verra que les mathématiques ont une part cruciale dans beaucoup de développements technologiques récents. On évoquera également le rôle qu'elles jouent dans la formulation et la modélisation des sciences, notamment (mais pas uniquement) de la physique. On a aussi mentionné l'utilité des concepts et de la démarche mathématique. Pour conclure, il nous semble important de rappeler que les mathématiques sont aussi une science de la nature, et de souligner leur aspect esthétique : après tout, la recherche de la vérité et de la beauté sont des buts tout à fait valables en soi.

L'EVOLUTION ET LES TENDANCES

Depuis environ une vingtaine d'années, il y a eu chez les mathématiciens un changement assez net d'orientation que Ton peut baptiser de '"retour au concret". Ceci par contraste et quelque peu en réaction contre la période précédente, qui a commencé juste après l'a près-guerre, et qui a été en grande partie dominée par la construction et l'utilisation de "grosses machines" théoriques, l'exemple le plus spectaculaire étant celui de la géométrie algébrique.

Cette tendance, symbolisée pour le meilleur et pour le pire par le groupe Bourbaki, était spécialement marquée en France; il faut d'ailleurs noter qu'elle a coïncidé avec une place particulièrement brillante de notre pays dans la recherche mathématique mondiale. Bien que les dangers de stérilisation aient été fort exagérés, il n'en est pas moins vrai que les contacts avec les autres disciplines scientifiques étaient devenus plus difficiles.

1 - INTÉGRATION DES MATHÉMATIQUES

La recherche mathématique est aujourd'hui tellement foisonnante qu'il serait fort présomptueux de prétendre donner un panorama des progrès réalisés récemment. Nous allons nous contenter de décrire quelques domaines qui paraissent les plus caractéristiques de son évolution.

Une caractéristique de In période actuelle semble être l'intégration toujours plus grande des mathématiques, au sens où il est de plus en plus fréquent qu'un concept né dans un domaine soit appliqué avec fruit dans un autre parfois très éloigné. Cela est aussi vrai, et c'est en grande partie nouveau, de concepts nés en dehors des mathématiques, notamment en physique, informatique et biologie. Ce transfert de concepts produit parfois des résultats inattendus et spectaculaires. Parmi les exemples les plus marquant, citons

- l'utilisation des théories de jauge, issues de la physique des particules, dans la topologie des variétés de dimension quatre,

- l'application des algèbres d'opérateurs à la théorie des nœuds,

- les rapports mystérieux entre le chaos quantique et l'hypothèse de Riemann,

- la multiplicité des techniques qui interviennent dans les mathématiques de la vision : ondelettes, physique statistique, réseaux de neurones, géométrie algébrique,

- les théories de la complexité,

- enfin, l'exemple sans doute le plus fascinant est relatif à l'utilisation de concepts de théorie quantique des champs dans divers domaines topologiques et géométriques, ainsi qu'en analyse sur les variétés : théorie de Morse, topologie algébrique (cohomologie elliptique), théorie de l'indice, variétés de petite dimension...

Tâchons néanmoins de dégager les principales problématiques actuelles - ou pour le moins un échantillon de celles-ci - et de cerner les thèmes en émergence, tout en soulignant, autant que faire se peut, les interactions, soit internes à la discipline, soit surtout avec les disciplines voisines,

2 - INTERACTIONS ENTRE LA PHYSIQUE ET LA TOPOLOGIE

On rencontre d'abord ces interactions dans l'élude topologique des variétés de petite dimension. Cette étude est cruciale, en particulier par *ses* évidentes relations avec la physique où Ton ne cesse de traiter de variétés de dimension deux (surfaces), trois (localement analogues à notre espace), ou plus généralement n, pour n petit.

Les problèmes de classification des variétés étant essentiellement résolus depuis vingt ans en dimension supérieure à cinq, l'attention s'est portée sur les dimensions trois et quatre : il est peut-être assez remarquable que ces dimensions, qui sont celles de l'espace et de l'espace-temps "ordinaire", soient de loin les plus riches. Il y a cependant, pour le mathématicien, une différence notable : en dimension trois, on dispose d'une description conjecturale assez complète qui constitue une vaste généralisation de la conjecture de Poincaré, et dans laquelle la géométrie hyperbolique joue un rôle crucial. En revanche, en dimension quatre, notre compréhension a été complètement bouleversée dans les dix dernières années, avec notamment la découverte d'une différence radicale entre variétés topologiques et différentielles, phénomène spécifique à cette dimension,

II y a eu d'abord la preuve de la conjecture de Poincaré topologique en dimension quatre, véritable tour de force qui a rajeuni de façon inattendue une vieille école de topologie générale. Plus généralement, une classification complète des variétés topologiques de dimension quatre à groupe fondamental pas trop compliqué a été obtenue.

Mais le véritable début de la période actuelle est constitué par l'utilisation des théories de jauge des solutions des équations de Yang-Mills, issues de la physique des particules des années 50, pour étudier les variétés différentielles de dimension quatre. Le résultat le plus stupéfiant, obtenu en combinant ces travaux avec les résultats sur les variétés topologiques, fut l'existence d'une structure différentielle exotique sur l'espace euclidien ; c'est la seule dimension où une telle structure existe. Par la suite, on a même montré qu'il y a une infinité continue de telles structures exotiques, ce qui semble apparenter les variétés de dimension quatre plus aux variétés complexes (par exemple les surfaces de Riemann) qu'aux variétés réelles des autres dimensions. Un fait très curieux est que la théorie utilisée pour démontrer ces résultats a pour origine certaines équations de la relativité, mais dans lesquelles on considérerait le temps comme imaginaire pur, passant de l'espace de Minkowski à l'espace euclidien. Tout récemment cette théorie a été utilisée pour étudier les plongements lisses de surfaces réelles dans les surfaces complexes. La version locale de ces résultats permet de répondre à de vieilles questions de théorie des nœuds.

Un développement ultérieur combine cette théorie avec l'interprétation supersymétrique de la théorie de Morse pour définir une homologie d'instantons pour les sphères d'homologie entière de dimension trois. Celle-ci raffine un précédent invariant qui s'était montré pertinent pour l'étude de la conjecture de Poincaré en dimension trois. Ce dernier illustre le fait que les méthodes "classiques" ont encore beaucoup à donner à condition d'être utilisées de manière inventive. C'est aussi ce que montre la preuve récente du fait qu'un nœud classique est déterminé par son complément complémentaire dans l'espace ambiant,

Un développement spectaculaire fut l'application de la théorie des algèbres d'opérateurs à la théorie des nœuds, domaines *a priori bien* éloignés : invariants polynomiaux pour les nœuds et les entrelacs. Maintenant on comprend mieux ce qu'une telle relation a de naturel, comme Test la relation entre les représentations du groupe de tresses et l'origine de l'équation de la R-matrice.

Mais l'événement de ces cinq dernières années a - paradoxalement peut-être - davantage consisté en une influence de la physique théorique sur les mathématiques fondamentales, par la spectaculaire intervention de la théorie quantique des champs en topologie et géométrie, et notamment pour les variétés de dimension trois et quatre (annonce d'une théorie quantique topologique des champs, nouveaux invariants).

Elle a donné naissance à toute une industrie de travaux à la frontière de la physique théorique, de la topologie de petites dimensions, de l'analyse non linéaire, des représentations de groupes, des algèbres d'opérateurs, des groupes quantiques... L'histoire avait commencé il y a une dizaine d'années, avec l'introduction en topologie et géométrie différentielle de méthodes de la théorie quantique des champs (supersymétrie). Ces idées ont même été utilisées dans des domaines assez éloignés, comme la transformation de Fourier géométrique ou l'analyse complexe.

De façon plus globale, les liens entre les mathématiques - et en particulier la géométrie - et la physique sont innombrables, de la théorie conforme des champs aux intégrales de Feynman en passant par la quantification géométrique ou la théorie quantique générale des champs. Les motivations des physiciens ont poussé à de remarquables innovations concernant les groupes quantiques et les algèbres d'opérateurs, la méthode de *scallering* inverse se révélant par exemple, une motivation pressante pour la construction et l'étude des systèmes intégrables quantiques.

De même, dans le domaine extrêmement vaste de la mécanique statistique, les problèmes de transitions de phase, par exemple, ont tout à la Fois bénéficié de l'étude des algèbres de Lie et motivé celles-ci, tandis que le développement en physique théorique de la théorie des cordes a suscité toute une problématique en topologie algébrique (analyse des genres elliptiques).

On pourrait multiplier à. l'infini les exemples de ce développement parallèle de la physique théorique ou de la physique mathématique et de théories mathématiques relevant de diverses branches : fonctions thêta non commutatives et équations de solitons (équations KP), thermodynamique des nombres (caraccérisation en termes d'algèbres d'opérateurs de la "transition d'Hagedorn"), modèles conformes et algèbre de Virasoro, systèmes intégrables et géométrie algébrique.

L'étude de phénomènes chaotiques, de la turbulence (au sein d'un gaz, par exemple, avec des applications directes en météorologie) fait aujourd'hui intervenir directement la décomposition en ondelettes, domaine auquel l'école française a apporté une contribution décisive. Les probabilités elles-mêmes interviennent sans cesse davantage en physique, par exemple au travers des spectres d'hamiltoniens aléatoires ou des probabilités quantiques.

3 - EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET MODÉLISATION

L'étude des équations aux dérivées partielles, qui relève en l'occurrence de l'analyse non linéaire, a, de tous temps, été fondamentale pour un très grand nombre de problèmes "appliqués". Notons, à titre de curiosité, que Tune des méthodes les plus employées, tant par les mathématiciens que par les utilisateurs, la méthode des éléments finis a été créée par des non-mathématiciens, et que la théorie a souvent bénéficié de ses applications, un exemple étant donné par le principe de taxation présent en économie en théorie des incitations, qui a fourni la solution d'une équation aux dérivées partielles qu'on ne savait pas résoudre.

Mais, alors que pour les équations de Yang-Mills vues dans le paragraphe précédent l'intérêt de l'équation résidait en grande partie dans le modèle physique qu'elle portait, l'accent ici est différent, et l'on s'intéresse plus aux solutions des équations pour elles-mêmes. C'est le cas pour les équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, par exemple dans le problème de Yamabe, et Ton a vu la preuve de diverses conjectures : conjecture de Calabi, conjecture de la masse positive en relativité générale. On a aussi constaté des phénomènes étonnants, comme l'apparition de "bulles" dans les équations aux dérivées partielles elliptiques ayant une non-linéarité critique, avec un retour aux équations de Yang-Mills, clans le cas des courbes holomorphes

Les applications en physique sont souvent relativement directes : découverte d'un type nouveau de solutions pour la turbulence en mécanique des fluides, la question demeurant posée du lien avec les solutions de viscosité, méthode de compacité par concentration. Les retombées, en biologie par exemple, de l'étude de la variété inertielle ou de la dimension fractale des attracteurs, en particulier pour les équations d'évolution décrivant des systèmes dynamiques de dimension infinie, sont encore aujourd'hui loin d'être claires.

Pareillement, toute une branche d'analyse extrêmement fine se fait sur un arrière-plan d'interaction directe en physique : l'analyse microlocale, qui étudie entre autres la propagation des singularités des solutions des équations aux dérivées partielles (en particulier hyperboliques). Et l'on peut prévoir un important développement de méthodes, considérant les propriétés qualitatives de ces équations et de leurs solutions, y compris de méthodes topologiques.

Toute une classe *des* équations aux dérivées partielles peut être qualifiée d'équations géométriques ; l'étude des surfaces minimales plongées dans l'espace euclidien de dimension trois, par exemple, est l'un des plus anciens problèmes de la géométrie différentielle; il a fait l'objet de nombreux travaux mathématiques suscités notamment par les problèmes posés par les physiciens (problème de Plateau sur l'existence d'un film de savon à contour donné, par exemple). Ces dernières années, son intérêt s'est affirmé dans des domaines extrêmement variés de la physique, de la chimie et de la biologie. l'intérêt pour les surfaces minimales (ou à courbure moyenne constante) périodiques. Deux de ces surfaces avaient; été étudiées déjà à la fin du siècle dernier par Schwarz, mais ces observations nouvelles ont entraîné un renouveau d'études mathématiques aboutissant, entre autres, à la découverte de la surface minimale périodique cubique la plus fréquemment observée expérimentalement.

Des travaux sur ordinateur ont permis de visualiser un grand nombre de ces surfaces minimales ou à courbure moyenne constante dont on ne possède pas de représentation analytique. Les comparaisons de ces images avec celles obtenues, par exemple, en microscopie électronique sont assez frappantes. Les discussions interdisciplinaires ont permis d'enrichir les interprétations des expériences, les modélisations des systèmes, et de poser ou de relancer des problèmes mathématiques intéressants.

De plus, ceci a aidé à trouver de nouvelles surfaces minimales plongées, et a contribué à renouveler ce domaine. Par ailleurs, les surfaces minimales dans des variétés de dimension trois autres que l'espace euclidien ont joué un rôle important en topologie de petite dimension. Tout ce domaine est aujourd'hui fort actif.

Il en est de même des développement des équations aux dérivées partielles stochastiques. L'école française s'est montrée dans les tous premiers rangs mondiaux pour l'étude des équations différentielles stochastiques (en particulier des diffusions), s'appuyant pour cela sur une excellente école probabiliste : elle se doit donc d'occuper une place mondiale dans le domaine *des* équations aux dérivées partielles stochastiques, à la frontière entre les courants stochastiques et l'analyse numérique ou le calcul scientifique. Le rôle des retombées - et donc des modélisateurs - sera de toute première importance, que ce soit en physique, en biologie (dynamique de population, modélisation d'influx nerveux...), ou encore dans le domaine des mathématiques financières.

jouera un rôle croissant dans le domaine des équations aux dérivées partielles, soit pour des résolutions numériques, soit même, dans le cadre stochastique, pour des simulations numériques.

Interactions avec les mathématiques appliquées

Les phénomènes physiques quantitatifs sont généralement décrits par des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires dans des limites singulières variées. Par exemple, dans l'équation de Navier-Stokes en mécanique des fluides, on fait tendre la viscosité (mesurée par l'inverse du nombre de Reynolds) vers zéro. A la limite, on obtient l'équation d'Euler. Si la viscosité est très petite mais non nulle, on a les phénomènes de turbulence. Le développement récent des moyens de calcul et de la sophistication des algorithmes a permis de découvrir par simulation numérique des phénomènes inattendus qu'on ne peut pas toujours reproduire expérimentalement, Mathématiquement, le comportement limite d'une suite de solutions fait intervenir le phénomène de concentration de l'énergie et d'oscillations décrites par une mesure de Young, grâce à laquelle on peut calculer toutes les limites faibles de fonctions non linéaires de la suite de gradients.

Tout récemment, cette théorie mathématique a été utilisée pour expliquer certaines transitions de phase dans les solides (alliages notamment) en fonction de la température. De tels phénomènes sont modélisés mathématiquement dans le cadre de l'élasticité non linéaire, gouvernée par une énergie non convexe. De nombreuses recherches mathématiques s'efforcent actuellement de comprendre la nature des supports possibles des mesures de Young pour analyser l'orientation des phases et les phénomènes de maclage martensitiques.

La compréhension de ces phénomènes est un modèle pour une interaction interdisciplinaire mettant en jeu des idées d'analyse non linéaire, de calcul numérique, et des méthodes asympiotiques sophistiquées.

Dans la théorie des cristaux liquides, si Ton veut prescrire les défauts, on est amené à considérer un certain type d'applications harmoniques. Là encore, l'énergie n'atteint pas son infimum, et il y a concentration dans les gradients de déformation.

Mécanique des solides : localisation des déformations

Le phénomène de "localisation des déformations" est couramment observé avant la rupture d'une pièce sollicitée mécaniquement. Sur le plan mathématique, cette localisation correspond à la perte d'ellipticité (faible) de l'opérateur tangent gouvernant l'évolution du champ de déformation (ou à la perte de la convexité de rang un de l'énergie minimisée par ce champ). Cet opérateur comprenant une partie locale et des conditions aux limites, l'examen de son ellipticité permet tour aussi bien de prévoir l'apparition des bandes de localisation au coeur du matériau que leur naissance au bord de la pièce.

Cette transition d'un régime elliptique à un régime hyperbolique des équations aux dérivées partielles qui gouverne le phénomène est connue de longue date dans l'analyse des chocs en mécanique des fluides. Mais il a fallu attendre la fin des années 70 pour en percevoir la portée en mécanique des solides, en raison de la diversité et de la complexité plus grande des lois de comportement des matériaux. Tout récemment, ces travaux ont été formalisés, puis généralisés au cours des trois dernières années, notamment en France, et l'on est maintenant en mesure de prévoir l'apparition et l'orientation de ces bandes de localisation pour une gamme très large de matériaux.

Ces travaux ont des prolongements numériques importants, et ils sont également appelés à jouer un rôle important dans une nouvelle formulation des lois de comportement.

4 - NOUVELLES INTERACTIONS ENTRE LA GÉOMÉTRIE ET L'ALGEBRE

Un trait frappant de l'évolution mathématique récente est le retour de la géométrie sous toutes ses formes, (La période précédente était bien dominée par la géométrie algébrique, mais la nature des méthodes était plus algébrique que géométrique). Un des aspects les plus intéressants est l'application d'idées géométriques à des problèmes algébriques, l'exemple le plus notable étant la théorie géométrique des groupes discrets.

Les travaux récents sur la géométrie non commucative proposent une nouvelle vision de l'espace physique fondée sur la théorie des algèbres d'opérateurs. Les développements possibles sont extraordinaires.

Théorie géométrique des groupes discrets

La *théorie combinatoire des groupes* étudie les groupes infinis de type fini, c'est-à-dire engendrés par un nombre fini d'éléments. Ces groupes apparaissent de manière très naturelle en topologie, H. Poincaré a en effet montré qu'il est possible d'associer à un espace topologique un *groupe fondamental* qui est de type fini dans la plupart des cas intéressants. La compréhension de ce groupe fondamental donne souvent une information très précise sur l'espace étudié. Pour cette raison, la théorie combinatoire des groupes a eu un développement important en essayant, comme son nom l'indique, de dégager des invariants combinatoires, si possible calculables explicitement. Le groupe est le plus souvent donné par une présentation dont on oublie l'origine topologique. Un exemple important de cette méthode est la théorie de la *petite simplification,* dégagée dans les années 60, qui consiste à étudier des groupes ayant très peu de relations entre leurs générations.

Un renouveau est apparu récemment dans cette théorie, justifiant probablement un changement de terminologie; on parle plutôt aujourd'hui de "théorie géométrique des groupes discrets[11]. L'idée principale est que le groupe fondamental d'un espace reflète non seulement les propriétés topologiques, mais aussi la géométrie de l'espace étudié. Ainsi, le groupe fondamental d'une variété à courbure négative a des propriétés extrêmement précises. Un travail important de fondement a été fait récemment : la définition et l'étude d'une classe de groupes appelés "hyperboliques" qui ont des propriétés proches des groupes fondamentaux des variétés à courbure négative. Il s'agit d'un changement de point de vue, car ces groupes ne sont pas définis en termes algébriques ou combinaioires, mais en termes de la géométrie de la métrique des mots. Cette nouvelle approche permet en particulier d'éclairer la "vieille" théorie de la petite simplification qui rentre maintenant très naturellement à l'intérieur de la théorie "hyperbolique[11].

Cette théorie géométrique des groupes discrets est en tres forte interaction avec de nombreux domaines : topologie clés petites dimensions, géométrie différentielle, systèmes dynamiques, théorie ergodique, et aussi informatique. Par exemple, la théorie des groupes automatiques se propose de décrire une famille de groupes (dont les groupes hyperboliques) qui peuvent être effectivement étudiés sur des ordinateurs. L'espoir est de disposer rapidement de programmes efficaces qui permettent de classer certaines variétés de dimension trois (pas trop compliquées).

Un nouveau point de vue sur ces questions engendre, bien sûr, de nouveaux problèmes, et la recherche est actuellement très active sur ces questions. Grâce à la qualité de sa recherche en géométrie et topologie, la France joue maintenant un rôle important clans le développement actuel de cette théorie.

Des interactions nouvelles entre la géométrie algébrique et la combinatoire semblent très prometteuses : elles concernent en particulier le lien entre la géométrie des polytopes et la géométrie algébrique, y compris pour la construction de variétés algébriques réelles ainsi que la résolution de célèbres conjectures sur les nombres de faces de diverses dimensions des polytopes, ou les liens encre la théorie des singularités, en particulier la géométrie des discriminants, et la combinatoire.

L'école française de systèmes dynamiques est sans conteste une des toutes premières, sinon la première du monde. C'est sans doute un juste retour des choses pour une discipline créée par H. Poincaré, et qui a connu ces dernières années un succès médiatique certain pour les aspects chaotiques et fractals.

5 - ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE ET THÉORIE DES NOMBRES

Ici encore, les progrès réalisés en mathématiques depuis quelques années sont spectaculaires ; citons la classification des variétés algébriques complexes de dimension trois modulo équivalence birationnelle et la structure des morphismes birationnels, ou les progrès décisifs vers l'établissement du programme de Langlands (correspondance entre les représentations 1-adiques et formes automorphes),

De fort vieux problèmes ont significativement évolué, par exemple avec les récents résultats sur les points rationnels des variétés algébriques, et en particulier le théorème de Fermat (conjecture ABC); par ailleurs, ce dernier semble maintenant "motivé" par les connexions avec les formes modulaires. Notons ici aussi l'utilisation accrue de calculs sur ordinateur.

De gros progrès ont été faits dans la compréhension du défaut de passage du local au global clans certaines équations diophanciennes (principe de Hasse-Minkowski et conjecture de Tate-Chafarevitch).

Enfin, le gigantesque programme de classification des groupes finis simples, engagé depuis les années 60, a été mené à son terme *(des* entaines de participants dans une dizaines de pays, peut-être dix. mille pages de démonstration !), Signalons aussi que des connexions fascinantes sont apparues entre certains des groupes sporadiques (notamment le fameux Monstre) et la physique théorique.

6 - LES INTERACTIONS ENTRE INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUE

Ces interactions sont loin de se borner, comme on le croit trop souvent, à l'utilisation de plus en plus fréquente des moyens de calculs par les mathématiciens pour la modélisation. L'ordinateur est souvent utilisé comme un outil expérimental par les mathématiciens qui testent, grâce à lui, des conjectures par le calcul ou la visualisation. De nouvelles surfaces minimales ont ainsi été décrites et visualisées grâce à l'informatique. Certains théorèmes, comme la fameuse conjecture des quatre couleurs, n'ont pu être prouvés que grâce à une vérification sur ordinateur, et aucune démonstration purement humaine n'est encore disponible. En topologie algébrique également, des calculs effectifs commencent à donner des résultais nouveaux (notamment pour les calculs des espaces de lacets).

Mais ceci n'est peut-être pas l'essentiel. Des pans entiers des mathématiques comme l'algèbre, la géométrie algébrique ou la logique voient leurs problématiques modifiées par l'informatique. Les questions d'effectivité, de complexité et d'efficacité sont à Tordre du jour. Une première question est, en effet, le caractère constructif des méthodes employées pour obtenir un résultat : c'est la question d'effectivité. Dans les bons cas, on peut étudier des algorithmes et donner une estimation de leur temps de calcul en fonction de paramètres bien choisis : c'est la question de la complexité. Enfin le développement de techniques efficaces permet dans certains cas de mener à bien les calculs.

C'est souvent par l'intervention de théories mathématiques plus élaborées que des algorithmes de complexité optimale peuvent être construits : citons par exemple le problème du déménageur de piano, un des problèmes fondamentaux de la robotique théorique, pour lequel des algorithmes de complexité simplement exponentielle dans le nombre de variables viennent d'être mis au point, basés sur des idées de théorie de Morse et de géométrie différentielle. Les résultats anciennement connus et basés sur la théorie de l'élimination donnaient une complexité doublement exponentielle. L'obtention de bornes inférieures pour les algorithmes résolvant un problème donné est très difficile. Les quelques techniques disponibles d'obtention de bornes inférieures reposent souvent sur des idées algébriques ou géométriques et utilisent des théorèmes mathématiques profonds.

La logique revient à ses origines syntaxiques et à son programme ambitieux de fondement général du calcul La théorie de la démonstration, éclipsée un temps par la théorie des modèles ou la théorie des ensembles, fait un retour en force.

Le calcul formel, qui consiste à développer des logiciels de manipulation symbolique et à étudier la complexité des algorithmes dans ce domaine, émerge comme une nouvelle composante du calcul scientifique.

Enfin les structures et concepts liés au développement de l'informatique, tels les automates ou les graphes, par exemple, donnent naissance à de nouvelles théories mathématiques.

La théorie des classes de complexité, qui cherche à classifier les problèmes de nature algorithmique par niveau de difficulté intrinsèque, connaît un développement rapide. Le problème "P est-il égal ci NP ?" est un des plus célèbres de cette nature. Les problèmes les plus difficiles de la classe NP sont les problèmes pour lesquels la vérification qu'une solution est la bonne est très rapide, alors que l'obtention d'une solution est très longue. De tels phénomènes se rencontrent dans la pratique quotidienne du mathématicien : il est aisé de vérifier qu'un certain nombre est bien le produit de deux autres, alors que le problème de la factorisation des entiers est très difficile (mais on ne sait pas démontrer que le problème de la factorisation des entiers est un des problèmes difficiles de la classe NP).

Les progrès de l'informatique d'aujourd'hui rejoignent ainsi de grands problèmes fondateurs des mathématiques.

7 - LES SCIENCES COGNITIVES

Pour le mathématicien, de 1992, le thème "sciences de la cognition" évoque à la fois une "nouvelle frontière" des mathématiques et une composante de celles-ci qui existe au moins depuis les mathématiciens présocratiques,

On peut dire, en effet, qu'une partie des mathématiques abstraites participe à la création d'un langage qui rend compte de phénomènes liés au mode biologique de perception de l'environnement dont nous disposons. Cela était probablement encore évident pour les mathématiciens et les philosophes jusqu'à ce que Petitot appelle joliment le "Yalta transcendantal" post-Kantien, qui a séparé les domaines de réflexion des sciences dites "dures" des autres, dont la Philosophie. Certaines pages de Locke ou Berkeley, sans parler de Maimonides ou Descartes, voire Helmholtz, sont d'une actualité frappante pour les sciences de la cognition, tant en ce qui concerne leur aspect biologique ou physique que leur aspect logique ou mathématique. Cependant, le "Yalta transcendantal" a fait de tels dégâts que ce qui paraissait une évidence à un penseur de la Philosophie Naturelle (au sens de *"Natural Philosophy')* se trouve aujourd'hui couvert d'éloges... pour son interdisciplinarité.

Si le fait de rassembler des disciplines pour étudier la cognition n'est donc nouveau que dans la mesure où nous avons oublié un passé relativement proche, il présente en ce moment un aspect "nouvelle frontière" tout à fait fascinant, dû pour une grande part aux progrès de la logique, de la neurologie, de la psychologie cognifive, des mathématiques, de la physique, de l'informatique et de la philosophie. Parmi les progrès essentiels, il faut citer la réapparition, dans certaines de ces disciplines, d'une attitude modeste devant la difficulté des problèmes : citons des exemples qui sont tous un peu de la même nature : une meilleure prise des conscience *chez les mathématiciens* des limitations de la méthode axiomatique, *chez les informaticiens* de la difficulté de donner un contenu réel au vocable "intelligence artificielle", *chez les logiciens* de l'impossibilité de réduire le raisonnement à la logique, *chez les linguistes* des limites de l'étude syntaxique. Tous ces phénomènes sont assez caractéristiques de l'évolution des sciences en ce dernier quart, de siècle, et libèrent des myriades de questions importantes. Il faut aussi noter des progrès essentiels dans la compréhension du système neurologique, la découverte d'analogies entre son fonctionnement et des phénomènes de physique statistique, des progrès en informatique théorique et en logique, l'invention de modèles convaincants de la perception visuelle et de la perception auditive, que Ton peut juxtaposer à ce que savent les neurologues et les informaticiens ou les linguistes, et Ton voit que la communication entre les sciences, si difficile pendant tant de temps, connaît une résurgence intense à un niveau technique digne de l'âge d'or évoqué plus haut. De plus, les relations des sciences dites dures avec la philosophie et la psychologie, par exemple, en tirent une nouvelle fraîcheur.

Le chapitre du *Rapport de conjoncture* consacré aux. Sciences de la cognition insiste beaucoup sur l'aspect interdisciplinaire et les enjeux sociaux du sujet. Il nous a paru utile de préciser ici, à titre d'exemple, quelques-uns des aspects d'un intérêt plus direct pour les mathématiciens, à la fois pour montrer que la généralité des concepts mathématiques continue dans ce domaine à jouer son rôle, et pour attirer l'attention des mathématiciens sur des problèmes qui relèvent d'interactions nouvelles très importantes, historiquement liés à la nature même des mathématiques. Les deux exemples choisis sont les rapports de la logique et de l'intelligence artificielle, et la théorie de vision.

La logique mathématique s'est longtemps confinée à des interactions internes aux mathématiques, illustrées par les applications de la théorie des modèles en algèbre. Les interactions externes étaient limitées ou douteuses : ainsi de la théorie de la démonstration "appliquée" à la philosophie des fondements. Depuis une quinzaine d'années, l'informatique offre un véritable domaine d'application à la logique. Par exemple, sur des questions cruciales comme la sécurité des logiciels, les λ-calculs typés apportent des réponses prometteuses, qui à leur tour induisent de nouveaux développements logiques. Observons que cette liaison fait éclater le cadre de la logique "classique" (celle des mathématiques) en réhabilitant d'autres formalismes, comme la logique intuitionniste de Brouwer.

Ceci ne peut qu'amener à prendre au sérieux le défi logique de l'intelligence artificielle": élargir le cadre déductif au-delà des mathématiques, de façon à embrasser *certains* des aspects du raisonnement informel.

Comme toujours dans un sujet qui démarre, la priorité est d'ordre méthodologique : quelles sont les bonnes questions ? Trop souvent on assiste au remplacement hâtif de problèmes réels par des problèmes d'école, questions abstraites dont la solution est soit impossible (par exemple, problèmes de cohérence tombant sous le coup du théorème de Gödel), soit sans retombée possible sur le problème de départ, Il nous semble que, dans un premier temps, on devrait se concentrer sur l'axiomatisation de la "rigueur informelle"; autrement dit, se cantonner aux questions pour lesquelles une approche déductive est possible *a priori,* bien que le formalisme adapté fasse défaut. Les systèmes logiques susceptibles de répondre à une telle demande sont de nature très différente de ceux utilisés en mathématique jusqu'à présent, c'est-à-dire essentiellement la logique classique. La mise sur pied de tels systèmes ne peut en aucun cas être le résultat d'un "bricolage" des règles de la logique classique; il est nécessaire d'envisager une refonte totale, intégrant les avancées les plus récentes en logique, et notamment en théorie de Sa démonstration. Tant que cette double contrainte (problèmes traitables et "vrais" outils logiques) ne sera pas satisfaite, le lien, pourtant très prometteur, entre logique et intelligence artificielle, ne pourra pas s'enclencher, et le sujet continuera à piétiner. Il faudrait donc plus de modestie en ce qui concerne les problèmes, et plus d'ambition et de rigueur au niveau des méthodes.

Depuis une quinzaine d'années, la théorie de la vision, c'est-à-dire la compréhension de la manière dont l'appareillage visuel élabore, mesure et reconnaît des images à partir des signaux électriques émis par la rétine, a fuit des progrès remarquables. Beaucoup sont dus aux idées de Marr, et plus récemment de Koenderink. Sans entier dans les détails, signalons certains des outils mathématiques qui interviennent : le développement en ondelettes du signal émis par la rétine permet d'identifier de manière stable les contours par des effets de seuil. La reconstruction d'images à partir des contours fait appel à des résultats liés à l'application de Gauss des surfaces plongées, et le traitement des variations d'échelle de perception (plus ou moins de détails, donc plus ou moins de contours) est modélisé par une opération de lissage gaussien (au sens des spécialistes de l'équation de la chaleur). Arrivé à ce point, le théoricien, qui doit être analyste et géomètre, peut demander à l'expert en réseaux de neurones ou à l'informaticien comment, à son avis, ces calculs peuvent être effectués dans un tel réseau, puis au neurologue s'il discerne des indices compatibles avec les dispositifs requis.

8 - LES PROBABILITÉS ET LES STATISTIQUES

Les statistiques sont, à l'évidence, le lieu privilégié de l'interaction entre mathématiques et sciences de la nature : leur objectif est, en effet, en premier lieu de rechercher des modèles qui s'ajustent à la réalité, ensuite de les utiliser pour prédire des comportements, parfois pour utiliser des procédures de contrôle des processus observés, par exemple afin d'optimiser un certain critère.

Aujourd'hui, on les considère comme très proches de la théorie des probabilités, du fait qu'elles utilisent massivement les modèles stochastiques, la modélisation par des aléas de notre connaissance imparfaite de monde s'étant montrée, dans bien des domaines, remarquablement efficace. Mais elles se démarquent des probabilités en ce qu'elles sont de nature inductive ("on remonte des effets aux causes"), quand la démarche du probabiliste est, comme c'est le cas en général en mathématiques, déduclive : elle déduit les conséquences d'hypothèses.

La France s'est montrée très à la traîne en statistiques jusqu'aux années 60 : notre pays payait là son tribut à un mépris alors dominant des applications chez les mathématiciens. Un changement radical - quoique non universel - d'attitude, joint au substrat d'une excellente école de probabilités, a permis, depuis cette période, de considérablement corriger ce défaut, la statistique est aujourd'hui présente clans beaucoup d'universités françaises, et les statisticiens y sont reconnus comme membres à part entière de la communauté mathématique.

La statistique couvre un large spectre allant de son emploi "en routine" aux statistiques théoriques (statistique asymptorique...), voire à la notion qui a émergé depuis le dernier *Rapport de conjoncture* de "probabilités appliquées[1]', recouvrant une démarche déductive, mais soucieuse des applications concrètes. Un exemple de probabilités appliquées réside dans les systèmes infinis de particules, pour lesquels l'école française figure dans les premiers rangs de la compétition internationale : un problème d'apparence très concret - des particules interagissent dans un espace, entrent en collisions, se détruisent, naissent, etc. - demande, pour être traité, des outils très sophistiqués, fondés sur les martingales en dimension infinie, ou de délicates limites dans des asymptotiques complexes.

Un discours analogue pourrait être développé à propos de la percolation ou des réseaux de neurones, sur lesquels nous reviendrons plus loin. Un autre domaine des probabilités appliquées traite des phénomènes de propagation d'ondes ou de conduction de chaleur dans des milieux aléatoires, ou rejoint l'analyse fine, par exemple dans l'étude d'opérateurs de Schrödinger ou de Dirac aléatoires ou l'étude des flots stochastiques et des équations aux dérivées partielles stochastiques.

L'école française de probabilités étant remarquée par ses résultats concernant les processus, les fIltrations associées, l'étude fine du mouvement brownien, etc., il était prévisible qu'une partie des statisticiens français traitent de statistique des processus, que ce soit au niveau théorique, ou pour leurs applications dans divers domaines, tels l'ingénierie, les mathématiques financières ou l'analyse des durées de survie censurées. On peut partiellement rattacher à ce courant de pensée les statistiques spatiales, pour lesquelles l'indice du processus sous-jacent devient multidimensionnel

Par rapport aux statistiques et à l'analyse numérique, les probabilités ont moins de rapports directs avec les applications, car elles n'interviennent pas dans le traitement des données. Par contre, elles interviennent dans la simulation (choix de procédures, évaluations de leurs performances, ..,), dans les modélisations (mise à la disposition du statisticien, par exemple, de schémas mathématiques utilisables), etc

Il est un point assez original en mathématiques appliquées, sur lequel l'attention mérite d'être attirée : les probabilités, de façon continue et diversifiée, ont apporté des idées dans différents domaines des mathématiques pures : théorie des nombres, géométrie (méthodes d'équation de la chaleur), théorie des groupes, systèmes dynamiques et théorie ergodique, théorie des opérateurs (probabilités quantiques), analyse fonctionnelle, physique mathématique (théorie combinatoire des champs, Schrödinger en potentiels aléatoires). Non seulement ce point mérite d'être noté, mais il mérite d'être encouragé, d'autant que les Français sont très présents au niveau international

9 - INTERACTIONS MATHÉMATIQUES-BIOLOGIE

Les interactions des mathématiques avec la biologie, au travers ou non de la physique, ont une longue et riche histoire. Les probabilités ont connu un essor important du fait de la génétique (de Mendel à Fisher); les statistiques n'ont cessé de se renforcer au contact de la biologie et de la médecine. Aujourd'hui la morphogénèse est une source de problèmes pour la géométrie, et Ton ne compte pas les motivations biologiques de la notion de fractal. Depuis l'apparition de la biologie moléculaire et des techniques expérimentales modernes, ces interactions se sont encore diversifiées.

L'interaction entre les mathématiques et les sciences du vivant s'est toujours faite dans les deux sens, et il doit en être ainsi : d'une part les mathématiques sont un outil indispensable au biologiste ou au médecin, et beaucoup reste à faire dans l'élaboration de méthodes mathématiques sophistiquées destinées à traiter les données du vivant : par exemple le traitement de données de suivie censurées, telles qu'on]es rencontre en essais cliniques, requiert, pour être mené correctement, une approche fondée sur la théorie des martingales. L'approche du génome humain demande une combinatoire complexe.

Mais aussi, et surtout, le vivant est amené à jouer, pour la recherche mathématique fondamentale, un rôle analogue à celui qu'a joué la physique au XIXème siècle : susciter des problématiques, comme c'est déjà le cas en ce qui concerne les réseaux de neurones ou la mathématisation de la biochimie. Le passage qui se fait depuis 50 ans d'outils mathématiques "réguliers" (analyse classique, fonctions déterministes, dérivabilité, ,..) à un outil plus complexe (aléatoire, singularités, fractals, autosimilarité, ...) associé à une puissance de calcul que seuls les ordinateurs modernes permettent, donne au mathématicien la possibilité d'étendre son. champ d'application de la physique (au sens large) à la biologie.

Citons quelques exemples de domaines où l'interaction des mathématiques avec la biologie se développe.

La théorie des réseaux de neurones est typique de l'enrichissement mutuel de deux sciences. Elle est partie d'une volonté de modéliser le comportement collectif des cellules du système nerveux central, en attribuant à chacune une capacité de décision très limitée et dépendant de façon simple des cellules "voisines"; très vite, à côté des algorithmes déterministes (algorithmes cellulaires), s'est fait ressentir la nécessité de processus stochastiques.

Dans un premier temps, donc, on a cherché à comprendre au moyen de tels modèles des comportements humains ou animaux plus ou moins complexes (structuration des organes sensoriels, tels les glomérules "intégrant" le sens olfactif des insectes, ou la vision chez les chais, processus d'apprentissages, etc.), développant par exemple pour cela la théorie des réseaux multicouches.

Mais, dans un second temps, c'est le modèle biologique qui est venu aider au développement de l'outil mathématique et informatique : il est apparu que les réseaux de neurones formels étaient capables de nombreuses tâches mathématiques, au premier rang desquelles la maximisation de fonctions. D'innombrables algorithmes ont été écrits (Hopfïeld, Kohonen,...) et les applications de tels réseaux, ont aujourd'hui gagné à peu près tous les domaines de l'activité humaine : citons au hasard la recherche de chemins minimaux (problème du voyageur de commerce), la décision économique, le traitement de la parole ou de l'image (telle la reconnaissance des empreintes digitales), etc.

Le traitement mathématique sous-jacent intègre des connaissances issues de multiples branches : probabilités, systèmes dynamiques, physique statistique, algorithmique, etc. Les implications de l'informatique et des mathématiques de l'informatique sont multiples et concernent, par exemple, une parallélisation de plus en plus massive de ces algorithmes, d'autant plus naturelle qu'un réseau de neurones est par construction un système dans lequel de multiples objets évoluent en parallèle.

La reconnaissance artificielle de formes relève un peu de la même dynamique : partie de la modélisation de la vision chez l'être vivant, elle tâche aujourd'hui de réaliser des algorithmes et des machines capables de simuler le comportement de l'animal. C'est un problème passionnant faisant actuellement l'objet de recherches très actives par des spécialistes de disciplines très diverses. Elle comprend le comptage de particules et le problème de détermination des bords. Du point de vue mathématique, c'est un problème mal posé, dont la solution n'est pas unique. Le rêve est pourtant de réaliser artificiellement ce que fait l'œil humain; pour cela, on utilise des outils très divers : réseaux de neurones, renforcements itérés des coefficients, percolation, ondelettes, géométrie algébrique et informatique (algorithmes de Mumford),

On pourrait multiplier de semblables exemples : l'étude des membranes biologiques et des bicouches lipidiques se fait aujourd'hui par des calculs analytiques à partir des potentiels d'interaction moléculaire ou par des simulations, par exemple de dynamique moléculaire. On applique la théorie des bifurcations des altracteurs des systèmes dynamiques aux systèmes biologiques (transmission d'influx nerveux, phénomènes périodiques, etc.).

La génétique est à elle seule un champ de développement infini pour les mathématiques ; diffusion de gènes dans une population (processus de branchement diffusifs), étude du repliement des molécules biologiques (développement de nouveaux types d'algorithmes). Le séquençage des génomes (en particulier dans le cadre de la cartographie du génome humain) a suscité, ces dernières années, la mise en place de réseaux interdisciplinaires auxquels les mathématiques sont nécessairement associées, et les outils déjà élaborés et à venir mêlent des idées issues de toutes les branches des mathématiques : combinatoire, probabilités, statistiques, algorithmique, topologie, géométrie, etc.

10 - D'AUTRES INTERACTIONS

Les domaines d'interaction que nous venons de survoler ne représentent pas - et de loin - les interactions existantes ou potentielles des mathématiques. Il serait totalement vain de prétendre à l'exhaustivité, et de nombreuses champs, parfois essentiels, n'ont pas trouvé place dans ce rapport.

Parmi ceux-ci, citons, à titre d'exemple l'analyse réelle, complexe et harmonique (théorèmes sur les opérateurs d'intégrale singulière), l'invention des ondelettes, la résolution de la conjecture de Bieberbach, les intégrales oscillantes, les représentations des groupes de Lie réductifs, l'optimisation (utilisation de la théorie du contrôle optimal en météorologie - voir le thème "Terre" du *Rapport de conjoncture* - dans le domaine de la catalyse chimique, sélection de l'information sur une métrique non-orthogonale : utilisation des méthodes de Lanczös).

LA SITUATION

La situation des mathématiques au CNRS se caractérise par la faiblesse de la part du CNRS par rapport à l'Université, comparée au cas des autres sciences "dures" : en gros, un chercheur pour dix enseignants-chercheurs.

1 - FORCES ET FAIBLESSES DE LA RECHERCHE MATHÉMATIQUE FRANÇAISE

L'état décrit dans le *Rapport de conjoncture* de 1989 reste essentiellement exact. On peut y ajouter une nette croissance de la demande d'interactions avec les mathématiques, et sa diversification. De plus, les interactions à l'intérieur même des mathématiques se multiplient et se diversifient aussi, ainsi que les interactions "directes" entre le cœur des mathématiques et d'autres domaines (informatique, physique, biologie). Ces interactions ont permis des progrès spectaculaires et en particulier la résolution de conjectures anciennes.

Globalement, les mathématiques se portent bien en France, et notre pays reste un des premiers du monde dans ce domaine, et sans doute le premier en Europe. Cependant il faut être attentif à un certain nombre de faits qui risquent de menacer à moyen terme la place tenue dans le monde par les mathématiques françaises, et à la correction desquels le CNRS peut apporter une contribution essentielle,

• L'autonomie croissante des Universités et la pression de l'enseignement font que, à part quelques Universités en France, les recrutements tendent à privilégier le renforcement strict des équipes existantes, ce qui nuit à la diversification dont le besoin se fait fortement sentir, et nuit d'ailleurs aussi à la possibilité pour des chercheurs CNRS d'être nommés sur un poste de professeur.

• Un risque de surprivilégier, dans les projets nouveaux, les applications au détriment du cœur; si le cœur est encore très bien défendu, il faut prendre garde que cela n'induise sur le moyen terme une dérive dangereuse.

Par ailleurs, il y a dans la compétence mathématique française un certain nombre de "trous", dus en grande partie à l'absence de diversification liée aux problèmes de recrutement des années 75-85. Par trou, entendons un domaine où l'activité en France est relativement faible. Bien qu'il n'y ait pas lieu de vouloir à tout prix tout couvrir, un certain nombre de ces trous concernent des domaines importants pour les applications et les interactions, internes ou externes. Citons comme exemples :

- la géométrie intégrale (aux deux sens du terme, analytique à la Gel'fand, ou plus géométrique à la Santalô),

- certaines parties de la géométrie algébrique (variétés de dimension trois : théorie de Mori),

- les mathématiques de la vision, et, plus généralement l'analyse d'images : il y a nécessité d'une synthèse sur ce sujet,

- la simulation géométrique et la visualisation de résultats numériques, provenant aussi bien d'équations aux dérivées partielles que d'équations algébriques; elles jouent un rôle expérimental de plus en plus important, et les mathématiciens devraient s'y intéresser plus,

- l'algèbre commutative et ses interactions avec la combinatoire, ainsi que l'élargissement du champ du calcul formel,

- la théorie moderne des fonctions spéciales, liée à la théorie des représentations : ceci est important pour les interactions avec la physique théorique,

- certaines parties des interactions avec la physique (théorie quantique des champs, groupes quantiques, physique statistique, vus du point de vue des mathématiciens),

- les théories de jauge et les variétés différentielles de dimensions trois et quatre,

- les mathématiques discrètes (combinatoire, .„), Le CNRS esc d'ailleurs en train de créer à Luminy un Institut consacré à ce thème, mais il importe que les mathématiciens soutiennent résolument cette initiative,

- les systèmes complètement intégrables : quelques personnes travaillent en France, et de façon performante sur le sujet, mais leur nombre demeure trop restreint : la masse critique n'est pas atteinte.

2 - L'ORGANISATION DES INTERACTIONS

Notons d'abord que si les actions d'organisation ont leur utilité pour encourager les chercheurs qui se sont spontanément lancés dans des domaines d'interaction, le développement de celles-ci passe surtout par la formation interdisciplinaire des étudiants futurs chercheurs.

L'organisation de ces actions est encore très insuffisante. En ce qui concerne, par exemple, la communication entre mathématiciens et physiciens, les deux principaux outils institutionnels sont :

- la RCP 25 de Strasbourg qui fonctionne depuis une trentaine d'années sur la base de réunions semestrielles. On a pu observer l'évolution des thèmes, aussi bien du côté des mathématiques que du côté de la physique théorique, au gré des courants forts d'un côté ou de l'autre. Strasbourg est devenu ainsi un endroit canonique où un théoricien peut localiser le genre d' information dont il pressent pouvoir trouver l'usage;

- l'école d'été des Houches, depuis une vingtaine d'années. Une école assez remarquable eut lieu en 1989 sur le thème "Physique théorique et théorie des nombres".

Ajoutons à cela le Laboratoire *d'Analyse Non Linéaire de* Nice, qui vient d'être créé comme Unité Mixte du CNRS, et l'UPR de Luminy, dont, un des axes est situé en théorie mathématique du génome.

Après un certain retard au départ, la France participe activement aux développements des mathématiques "quantiques". C'est notamment Strasbourg qui semble conduire le mouvement. Le rôle du CNRS pourrait être essentiel pour attirer des spécialistes étrangers de premier plan de ces domaines, notamment les ex-Soviétiques (l'école de Leningrad était à l'avant-garde de toutes ces théories), ce qui a justement été commencé à Strasbourg,

D'autre part, les interactions entre mathématiques et informatique sont encore plus difficiles du fait que ces deux disciplines appartiennent à deux départements différents du CNRS : SPM et SPI.

Le GDR *Mathématique et Informatique,* créé par le département SPI et soutenu par le département SPM, joue un grand rôle de structuration de la communauté. En ce qui concerne le calcul formel, le GDR *Médicis,* créé par SPM, se propose de développer le calcul formel et plus généralement les mathématiques effectives. L'implication de plus en plus grande des mathématiciens dans ces domaines paraît de bon augure. L'existence de postes fléchés sur ces thématiques est une excellente chose.

PERSPECTIVES ET RECOMMANDATIONS

La nature de la discipline, où les investissements lourds hors personnel (bibliothèques, informatique) sont peu dépendants d'options scientifiques pour le moment, font que, malgré son (trop) faible poids relatif en mathématiques, le CNRS a joué un rôle déterminant. Il peut continuer à le jouer s'il s'adapte à la diversification des mathématiques. En fait, les axes d'action du CNRS, à part la poursuite du soutien de la recherche fondamentale, pourraient être dominés par l'idée d'accompagner la demande de diversification comme suit :

- Augmenter le recrutement de jeunes pour pouvoir en lancer un certain nombre sur des pistes nouvelles, ce que l'Université, malgré son grand nombre de postes, est relativement moins en position de faire en ce moment,

- Renforcer le potentiel d'encadrement DR : ceux-ci, ayant plus de temps que les universitaires (en gros), devraient explorer les possibilités nouvelles pour y lancer des jeunes sans prendre de trop gros risques, tout en continuant bien sûr à faire progresser les domaines où nous sommes déjà de bon niveau. Rappelons, s'il en est besoin, que particulièrement en mathématiques il est difficile, sinon impossible, de prévoir quels sont les résultais qui se révéleront utiles demain.

- Détachements de professeurs pour améliorer l'encadrement et leur recherche,

- Soutenir un certain nombre de directions, que nous citerons plus loin. Ce soutien, ainsi que l'encouragement à la diversification, pourraient utiliser les moyens suivants, dont certains ont déjà commencé à être mis en place.

- Création d'unités. Il faut multiplier les initiatives telles la création de l'*Institut de Mathématiques Discrètes* (Luminy), et il est fondamental qu'une étude préalable fine soit réalisée, par exemple pour décider de son caractère spécialisé à un thème fixe ou généraliste.

- Postes roses ou rouges pour inviter des étrangers à venir apporter leur compétence dans des domaines où nous sommes un peu faibles. Ces postes doivent être planifiés avec une avance suffisante pour que le processus d'invitation puisse être effectif.

- Années spéciales et appels d'offres dans des domaines assez précis.

- Soutien aux laboratoires organisant des actions de formation pour des étudiants de DEA. Dans cet esprit, le CNRS pourrait s'investir plus dans les lieux où sont formés les futurs chercheurs, surtout pour encourager des formations pluridisciplinaires (mathématiques/physique, mathématiques/biologie, mathématiques/informatique).

- Ecoles d'été pour encourager les interactions, prenant ainsi exemple sur les Houches.

Notons un point où le CNRS a une action positive : alors que les thèses en mathématique ont tendance aujourd'hui à se faire de façon trop rapide, en particulier sous la pression des postes à pourvoir, les chercheurs du CNRS non thésés consacrent souvent plus de temps à ce travail, évitant ainsi un risque de spécialisation excessive et prématurée. De même, il importe que le CNRS se préoccupe de la formation post-doctorale de ses chercheurs.

Ajoutons enfin que si le souci du CNRS de chercher une certaine "Visibilité" en mathématiques est compréhensible, il importe que cette visibilité soit de très bonne qualité et ne se ramène pas à suivre des modes. L'encouragement aux efforts longs et soutenus ne doit pas faiblir. Longue est la liste des thèmes que le CNRS doit encourager par son soutien. Sans avoir l'ambition d'être exhaustifs, donnons une première liste :

- équations aux. dérivées partielles non linéaires, propriétés qualitatives des équations aux dérivées partielles,

- mathématiques discrètes (cf. Luminy), interactions avec le traitement des données issues du séquençage du génome,

- algèbres d'opérateurs,

- théorie du contrôle et problèmes inverses,

- algorithmique parallèle,

- géométrie sous toutes ses formes, en particulier la géométrie semi- algébrique et la géométrie des systèmes dynamiques et spécialement des phénomènes ergodiques,

- géométrie arithmétique,

- théorie des nombres, en particulier dans ses aspects calculatoires,

- analyse, en particulier analyse microlocale et analyse non linéaire,

- probabilités et statistiques.

Il faut bien sûr ajouter à cette liste celle des "trous" mentionnés plus haut. Toutefois il convient d'être prudent et surtout de garder l'esprit ouvert.

Dans les domaines des mathématiques appliquées dont le développement au CNRS est récent, par exemple le calcul formel, il est normal d'évaluer en Comité National les résultats obtenus depuis cinq ans et la qualité de leur "retour amont" vers la recherche fondamentale comme de leurs applications industrielles. Le même travail est à faire, de manière prospective, avant d'impliquer le CNRS dans de nouveaux sujets, comme, par exemple, les mathématiques financières.

temps déjà elle Tétait de par son besoin de bibliothèques (qui restent encore aujourd'hui l'outil de base de son travail). Elle Test encore bien davantage par la nécessité de l'ordinateur, qui après avoir été flagrante pour l'analyste numéricien ou le statisticien, devient peu à peu incontournable pour toute la communauté.

En mathématiques tout au moins, ce que le CNRS pourra mettre sur les équipements sera toujours une part minime de l'effort que peut faire l'industrie. Le CNRS doit se concentrer essentiellement sur les aspects théoriques. Cette intervention doit passer par les Unités de Recherche (Associées ou Mixtes), mais aussi passer par un soutien à l'IHES, au CIRM, à l'THP...

Il est fondamental d'intégrer une collaboration accrue avec les mathématiciens des pays de l'Est, notamment russes : cette collaboration doit développer des aspects humains (postes, collaborations avec les centres de recherche locaux) et scientifiques : développement de nouveaux thèmes, notamment à la frontière de la physique (groupes quantiques, systèmes intégrables), mais aussi ailleurs : algèbres d'opérateurs, singularités...

2 - SUGGESTIONS "STRUCTURELLES"

Par sa conception même, le CNRS est l'organisme le mieux armé pour mettre en œuvre une politique intelligente et dynamique de la recherche en mathématiques. Pour définir ou encourager des axes prioritaires, le CNRS dispose d'une panoplie de moyens, qui ont fait leurs preuves récemment : la création bien choisie de laboratoires, ou mieux, d'instituts; la création de GDR pour favoriser les activités inter-disciplinaires; la déclaration d'années spéciales; le fléchage des postes.

Pour améliorer le tissu de la recherche, il faut poursuivre l'effort entrepris en faveur de la province, qui doit s'accompagner de la mise en place de bibliothèques de référence, de moyens informatiques performants, de recrutement de cadres À, qui sont mieux à même que des universitaires pour diriger et orienter les jeunes chercheurs en raison de leur meilleure disponibilité. A nouveau, l'affichage des postes est essentiel. Il faut aussi assurer un flux d'entrée soutenu et favoriser la mobilité par les détachements, les postes roses, la création d'emplois post-doctoraux.

Enfin, on préparera l'avenir en soutenant les formations pluri-disciplinaires (mathématiques-physique, mathématiques-informatique, mathématiques-biologie, mathématiques-sciences humaines), peut-être en profitant du cadre des magistères puisqu'on trouve ceux-ci dans les principaux centres de recherche mathématique.

Pour terminer, souhaitons que le CNRS continue de préserver l'unité "politique" des mathématiques malgré les oscillations des CCU, CSU et autres CNU. La science française a tout à y gagner

Par ailleurs, l'ouverture (hautement souhaitable) vers l'industrie demande davantage de disponibilité par rapport aux tâches d'enseignement. Il faut donc un nombre raisonnable de chercheurs à temps plein dans ce créneau, ce qui est loin d'être le cas, les salaires du CNRS n'étant pas compétitifs par rapport à ceux de l'industrie. H faut aussi que, dans ce domaine où l'efficacité ne se mesure pas uniquement en nombre de théorèmes, la carrière des chercheurs puisse se dérouler à une vitesse normale. Enfin, pourquoi ne pas envisager, comme dans d'autres secteurs (biologie, chimie), la création d'unités ou de projets communs CNRS-Industrie ?

L'Ecole mathématique française demeure Tune des toutes premières du monde. Mais ce n'est que par une gestion attentive de la discipline qu'elle le restera : les choix, tant numériques (nombre d'étudiants dans les filières de mathématiques), que qualitatifs seront déterminants. Ces derniers doivent prendre en compte l'équilibre entre le développement indispensable du cœur de mathématiques "pures" - en particulier, il convient de veiller à ce que les "savoirs[11] ne disparaissent pas -, et les relations avec les autres sciences. Langage et outils pour celles-ci, les mathématiques doivent savoir y puiser de nouvelles sources de problèmes.

Jean-Claude Sikorav
Bernard Prum
Rédacteurs du groupe 01